



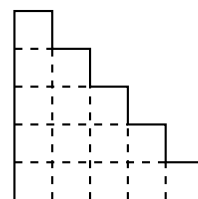
# Košický Matboj

Košice 21. 10. 2016

- 1.1. Určte, koľko prirodzených čísel medzi 1 až 10 000 (vrátane) je druhou mocninou prirodzeného čísla.
- 1.2. Majme 10 priamok v rovine takých, že žiadne tri neprechádzajú jedným bodom. Na najviac koľko častí delia tieto priamky rovinu?
- 1.3. Určte maximum výrazu  $x^2 + xy + y^2$ , ak  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$  a  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 1.4. Dostal som zadané dve dvojciferné prirodzené čísla. Potom som ich obe zaokrúhlil na desiatky. Určte, ktoré čísla som mal zadané, ak viete, že súčasne platí:
- rozdiel zaokrúhlených čísel je rovnaký ako rozdiel pôvodných čísel,
  - súčin zaokrúhlených čísel je o 184 väčší než súčin pôvodných čísel.
- 1.5. Majme obdĺžnik  $ABCD$  s dĺžkami strán:  $|AB| = 20$  a  $|BC| = 10$ . Body  $W$  a  $K$  sú mimo obdĺžnika tak, že  $|WA| = |KC| = 12$  a  $|WB| = |KD| = 16$ . Určte  $|WK|$  v tvare  $|WK| = m\sqrt{n}$ , kde  $m$  a  $n$  sú kladné celé čísla a  $m > 1$ .
- 1.6. Určte najmenšie prirodzené číslo  $n$ , pre ktoré sú obe čísla  $n+3$  aj  $n-1000$  druhými mocninami prirodzených čísel.
- 1.7. Skupina  $n$  kamarátov písala test, ktorý obsahoval 8 otázok s výberom možností ( $S_1, \dots, S_8$ ) a štyri otázky s otvorenou odpoveďou ( $F_1, \dots, F_4$ ). Každý z kamarátov správne zodpovedal 11 z 12 otázok. Vytvorili sme si tabuľku  $8 \times 4$ . Do  $i$ -tého riadku a  $j$ -tého stĺpca zapíšeme počet ľudí, ktorí správne vyriešili ako úlohu  $S_i$ , tak aj úlohu  $F_j$ . Súčet čísel v tabuľke je 256. Aký bol počet kamarátov?
- 1.8. Určte, koľko existuje trojíc celých čísel  $a, b, c$  z intervalu  $\langle -2016; 2016 \rangle$  takých, že pre nich platí:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{c}.$$

- 1.9. Koľko najmenej priamok v priestore musíme mať, aby sme z nich vedeli vždy vybrať 3, ktoré sú navzájom rovnobežné, mimobežné alebo rôznobežné?
- 1.10. Na obrázku máme schody výšky 5. Koľkými spôsobmi ich vieme rozdeliť na 5 obdĺžnikov s celočíselnými dĺžkami strán?
- 1.11. Suppose you have 15 circles of radius 1. Compute the side length of the smallest equilateral triangle that could possibly contain all the circles, if you are free to arrange them in any shape, provided they do not overlap.
- 1.12. V obore kladných čísel nájdite všetky riešenia rovnice  $x^3y + y^2 = 6xy - 8$ .



- 2.1. Ku každej stene kocky sme prilepili taký pravidelný štvorboký ihlan, že vzniklo teleso s 12 stenami. Koľko má toto teleso vrcholov?
- 2.2. Na rovnej ceste ležia za sebou 4 obce  $A, B, C, D$  (v tomto poradí). Medzi obcami  $B$  a  $C$  je križovatka  $K$ . Táto križovatka sa nachádza uprostred medzi obcami  $A$  a  $D$  a v tretine vzdialenosti z  $C$  do  $A$ . Vzdialenosť  $CD$  je menšia ako 10 km, vzdialenosť  $AB$  je väčšia ako 16 km. Vzdialenosti každých 2 miest sú v kilometroch vyjadrené celými číslami. Vypočítajte vzdialenosť  $B$  a  $C$ .
- 2.3. Dvaja hráči striedavo umiestňujú na hraciu plochu  $3 \times 3$  znaky  $X$  a  $O$  (ako v piškvorkách). Začína stále  $X$  a hrajú, až pokiaľ nepokryjú celú plochu. Celkovo je 126 rôznych spôsobov ako  $X$  a  $O$  umiestniť. Koľko z týchto spôsobov je takých, že na pláne budú v jednom riadku, stĺpci, respektíve diagonále 3 znaky  $O$ , ale nebude tam žiadny riadok, stĺpec ani diagonála zložená z 3 znakov  $X$ ?
- 2.4. Ak zväčšíme čitateľ aj menovateľ istého zlomku o 1, dostaneme zlomok o hodnotu  $1/20$  väčší. Ak urobíme s väčším zlomkom rovnakú operáciu, dostaneme zlomok o hodnotu  $1/12$  väčší, ako bola hodnota zlomku na začiatku. Určte stredný z týchto 3 zlomkov.
- 2.5. Aspoň koľko bodov treba vyznačiť vnútri konvexného  $n$ -uholníka, aby každý trojuholník s vrcholmi vo vrcholoch  $n$ -uholníka obsahoval vo svojom vnútri aspoň jeden vyznačený bod?
- 2.6. Neprázdnu množinu prirodzených čísel nazveme malou, pokiaľ má menej prvkov, ako je jej najmenší prvok. Určte počet všetkých malých množín, ktoré sú podmnožinami množiny  $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$  a majú túto vlastnosť: Ak patria do množiny čísla  $x, y$  (pričom  $x \neq y$ ), tak tam patrí aj  $|x - y|$ .
- 2.7. Robčo sa pomaly, ale isto učí abecedu. To, že zatiaľ pozná len písmená  $A$  a  $B$ , ho vôbec neodrádza a tvorí všetky možné slová dĺžky  $n$  také, že sa v nich nenachádzajú dve písmená  $B$  za sebou. Koľko takých slov dĺžky 12 existuje?

- 2.8.** Určte, koľko prirodzených čísel medzi 1 až 1 000 (vrátane) je mocninou prirodzeného čísla.
- 2.9.** Určte minimum výrazu  $x^2 + xy + y^2$ , ak  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$  a  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 2.10.** Množinu čísel  $\{1, 2, 3, \dots, 63\}$  sme rozdelili na tri neprázdne disjunktné množiny. V každej z množín sme vypočítali súčin všetkých prvkov a určili sme najväčší spoločný deliteľ týchto troch súčinov. Aké najväčšie číslo sme mohli dostať?
- 2.11.** There are four seats arranged in a circle and a person is sitting on one of the seats. He rolls a die 6 times. For each roll of the die, if it lands on 4, he moves one seat clockwise. Otherwise, he moves  $k$  seats counterclockwise where  $k$  is the number he rolled. Compute the probability that he ends up on the same seat he originally started on.
- 2.12.** V konvexnom štvoruholníku  $ABCD$  sa uhlopriečky  $AC$  a  $BD$  pretínajú v bode  $X$ . Kružnice opísané trojuholníkom  $AXD$  a  $BXC$  sa pretínajú v bode  $Y$  rôznom od bodu  $X$ . Bod  $X$  je stredom vpísanej kružnice trojuholníku  $ABY$ . Zistite veľkosť uhla  $CAD$ .

- 3.1.** Máme 28 objektov usporiadaných do kruhu. Ak máme vybrať práve 3 objekty tak, aby žiadne dva z nich neboli priamo oproti sebe, koľko existuje takých možností?
- 3.2.** Umiestnite na šachovnicu  $6 \times 6$  šesť dám tak, aby sa žiadne dve neohrozovali. Dáma sa môže pohybovať v ľubovoľnom priamom smere (vodorovne, horizontálne a šikmo) o ľubovoľný počet políčok.
- 3.3.** Koľko existuje možností korektného uzátvorkovania 8 zátvoriek (4 párov zátvoriek)? Korektné uzátvorkovanie je napr.  $()(())()$ , ale nie  $)()(()()$ .
- 3.4.** Ku každej stene kocky sme prilepili taký pravidelný štvorboký ihlan, že vzniklo teleso s 12 stenami. O koľko percent má zlepené teleso väčší objem ako pôvodná kocka?
- 3.5.** Koľko prirodzených čísel neprevyšujúcich milión má práve 25 rôznych deliteľov?
- 3.6.** Štyri po sebe idúce prirodzené čísla sú postupne deliteľné 11, 7, 5, 4. Nájdite najmenšiu takúto štvoricu.
- 3.7.** Určte všetky dvojice  $(a, b)$  reálnych čísel, pre ktoré má každá z rovníc

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$x^2 + (2a + 1)x + 2b + 1 = 0$$

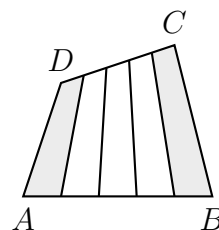
dva rôzne reálne korene, pričom korene druhej rovnice sú prevrátené hodnoty koreňov prvej rovnice.

- 3.8.** Na každom políčku šachovnice  $10 \times 10$  je mucha. Na signál každá mucha preletí diagonálne ponad jedno políčko na iné políčko šachovnice. Koľko najmenej prázdnych políčok môže zostať?
- 3.9.** Určte všetky prirodzené čísla  $n$  také, že výraz

$$\frac{n^4 + 4}{17}$$

je prvočíslo.

- 3.10.** Strany  $AB$  a  $CD$  konvexného štvoruholníka  $ABCD$  sú rozdelené na pätiny. Spojením zodpovedajúcich si bodov (viď obrázok) je štvoruholník  $ABCD$  rozdelený na 5 menších štvoruholníkov, pričom prvý má obsah 10 a posledný 22. Určte obsah štvoruholníka  $ABCD$ .



- 3.11.** Compute the number of ways 6 girls and 5 boys can line up if all 11 people are distinguishable and no two girls stand next to each other.
- 3.12.** Zistite, koľko riešení má v obore reálnych čísel rovnica

$$\frac{\cos(x\pi)}{x} = \frac{1}{2016}.$$

## Výsledky:

1.1. 100 1.2. 56 1.3. 3 1.4. 16 a 26 1.5.  $2\sqrt{221}$  1.6. 1441 1.7. 10 1.8.  $12 \cdot 2016^2 = 48771072$  1.9. 9 1.10. 42 1.11.  $2\sqrt{3} + 8$   
1.12.  $(x, y) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

2.1. 14 2.2. 10 2.3. 12 2.4.  $4/5$  2.5.  $n - 2$  2.6. 236 2.7. 377 2.8. 41 2.9.  $1/2$  2.10.  $2^{19} \cdot 3^{10} \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$   
2.11.  $61/243$  2.12.  $90^\circ$

3.1.  $28 \cdot 26 \cdot 24/3! = 28 \cdot 26 \cdot 4 = 2912$  3.2. napr. vid' obrázok: 3.3. 14 3.4. 100% 3.5. 7  
3.6. 1133, 1134, 1135, 1136 3.7.  $(a, b) = (-1/3, -1)$  3.8. 20 3.9.  $n \in \{3, 5\}$  3.10. 80 3.11.  
 $6! \cdot 5! = 86400$  3.12. 4033

				D	
		D			
D					
					D
			D		
	D				



<http://www.strom.sk>  
<http://seminar.strom.sk>  
<http://seminar.strom.sk/sk/matboj>



<http://www.upjs.sk/prirodovedecka-fakulta>  
<http://skoly.science.upjs.sk>  
<http://www.upjs.sk/prirodovedecka-fakulta/informacie-pre-zaujemocov-o-studium>