Ahoj!

Tvojmu pohľadu zjavne neuniklo ďalšie vydanie Stromu, v ktorom nájdeš nielen poradie po prvej sérii tohto semestra, ale aj naše vzorové riešenia. Nezabúdaj však, že sme ešte len v polčase, tak určite nepoľavuj a pusti sa do druhej série. S radosťou očakávame tvoje ďalšie riešenia!

Stromáci

1.

Opravovali: **Mirka Horváthová a Jano Richnavský**
Počet riešení: 42 Najkrajšie riešenia: **Marek Horváth a Eva Krajčiová**

Majme dve periodické postupnosti s periódami 7 a 13 (perióda p postupnosti a_1, a_2, … je najmenšie p, pre ktoré platí $a_n = a_{n+p}$ pre všetky kladné celé n). Akú najväčšiu dĺžku môže mať začiatočný úsek, v ktorom sa budú obe postupnosti zhodovať?

Riešenie

Označme jednotlivé členy postupnosti s periódou 13 postupne ako $a_1, a_2, a_3, \ldots$ a členy postupnosti s periódou 7 ako $b_1, b_2, b_3, \ldots$. Takéto postupnosti sa vedia teoreticky zhodovať v najviac prvých 18 členoch, čo dokážeme sporom. Predpokladajme teda, že sa vedia zhodovať v prvých 19 členoch. V takom prípade platí:

$$\begin{gathered} a_1 = b_1; \quad a_2 = b_2; \quad a_3 = b_3; \quad \ldots; \quad a_7 = b_7; \\ a_8 = b_1; \quad a_9 = b_2; \quad a_{10} = b_3; \quad \ldots; \quad a_{14} = b_7; \\ a_{15} = b_1; \quad a_{16} = b_2; \quad a_{17} = b_3; \quad a_{18} = b_4; \quad a_{19} = b_5. \end{gathered} \tag{1}$$

Zároveň ale vieme, že pre postupnosť s periódou 13 platí:

$$a_{14} = a_1; \quad a_{15} = a_2; \quad a_{16} = a_3; \quad \ldots; \quad a_{19} = a_6. \tag{2}$$

Pozrime sa teraz na to, čo platí o členoch b_1 až b_6 (prvá rovnosť v riadku vyplýva z (1), druhá z (2), tretia opäť z (1)):

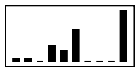
$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 = a_{14} = b_7; \\ b_2 &= a_2 = a_{15} = b_1; \\ b_3 &= a_3 = a_{16} = b_2; \\ b_4 &= a_4 = a_{17} = b_3; \\ b_5 &= a_5 = a_{18} = b_4; \\ b_6 &= a_6 = a_{19} = b_5. \end{aligned}$$

Z toho nám vyplýva, že všetky členy postupnosti s periódou 7 sú rovnaké, čo je ale spor, lebo v takom prípade by mala daná postupnosť periódu dĺžky 1, a nie 7. Teda naše postupnosti môžu mať rovnakých najviac prvých 18 členov.

V ďalšom kroku ukážme, že také postupnosti skutočne existujú. Nech členy postupnosti s periódou 7 sú 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1 a členy postupnosti s periódou 13 sú 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2. Teraz skutočne platí, že $a_n = b_n$ pre $n \in \{1, 2, \ldots, 18\}$.

2.

Opravovali: **Lujza Milotová a Štefan Vašak**
Počet riešení: 43 Najkrajšie riešenie: **Michal Vodička**

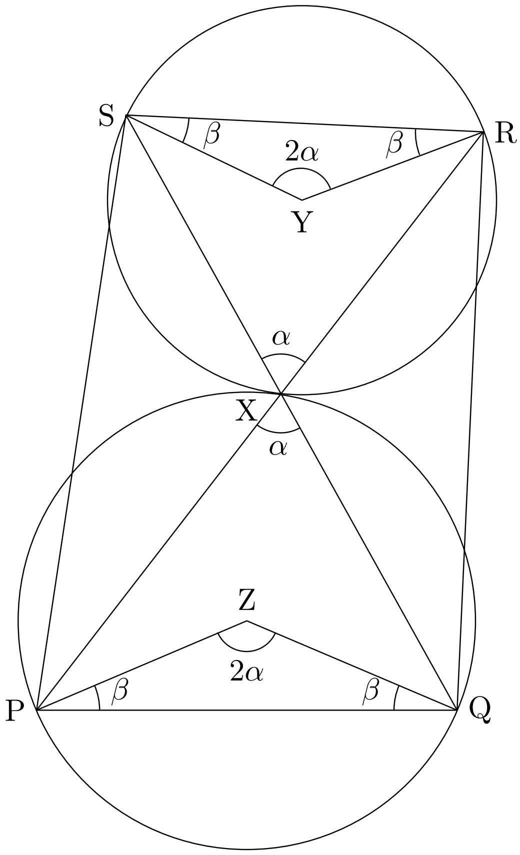


Nech $PQRS$ je štvoruholník, ktorého uhlopriečky sa pretínajú v jeho vnútornom bode X. Ukážte, že strany PQ a RS majú rovnakú dĺžku práve vtedy, keď majú kružnice opísané trojuholníkom PQX a RSX rovnaký polomer.

Riešenie

Označme si všetko potrebné na obrázku. Z je stred kružnice opísanej trojuholníku PQX a Y je stred kružnice opísanej trojuholníku RSX. Uhly PXQ a SXR sú vrcholové, čiže rovnako veľké, označme si ich veľkosť α.

Potom k týmto obvodovým uhlom príslušných kružníc máme stredové uhly PZQ a SYR, ktoré majú teda veľkosť 2α. V prípade, že sú uhly PXQ a SXR tupé, im prislúchajúce stredové uhly PZQ a SYR sú nekonvexné. V tom prípade nás budú zaujímať uhly k nim opačné, ktoré budú mať oba veľkosť $360 - 2\alpha$.



Trojuholníky PZQ a SYR sú rovnoramenné, pretože dve ich ramená sú tvorené polomermi kružníc. A keďže majú uhol oproti základni rovnaký, tak sú aj podobné.

Chceme dokázať tvrdenie v tvare ekvivalencie, môžeme teda dokázať implikácie v oboch smeroch.

- Dokážme, že ak $|PQ| = |RS|$, tak potom sú polomery kružníc rovnaké:

  Ak $|PQ| = |RS|$, tak aj $|PZ| = |QZ| = |SY| = |RY|$, keďže vtedy budú trojuholníky PZQ a SYR zhodné.

- Dokážme, že ak sú polomery kružníc rovnaké, tak $|PQ| = |RS|$:

  Ak $|PZ| = |QZ| = |SY| = |RY|$, tak aj $|PQ| = |RS|$, opäť kvôli zhodnosti trojuholníkov PZQ a SYR.

A tým sme dokázali, čo sme chceli.

Komentár

Vo vašich riešeniach sme sa stretli s troma rôznymi prístupmi:

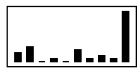
Tí, ktorí ste sa rozhodli použiť obvodové a stredové uhly, ste sa väčšinou vybrali tou najlepšou cestou. Často ste však dokázali iba jednu z implikácií.

Niektorí ste sa rozhodli podobnosť trojuholníkov ukázať vyuhľovaním, ale robili ste to iba pre nejaký konkrétny prípad vzájomnej polohy kružníc. Také riešenia teda tiež neboli úplné.

Použitie sínusovej vety bolo tiež korektné, no bolo potrebné poriadne vysvetliť, ako presne z nej podobnosť trojuholníkov vyplýva.

3.

Opravovali: **Patrik Paľovčík a Martin Šmilňák**
Počet riešení: 34 Najkrajšie riešenie: **Matúš Pokorný**



Na stole je 7 kôpok po 2024 kameňov. Bia a Šmili hrajú hru, pričom Bia začína. Každý ťah si hráč vyberie jednu kôpku a zvyšné kôpky vyhodí z hry. Potom túto zvolenú kôpku rozdelí na 2 až 7 neprázdnych kôpok. Hráč prehráva, ak nevie spraviť ťah. Má niektorý z hráčov víťaznú stratégiu? Ak nie, prečo? Ak áno, akú?

Riešenie

Pozrime sa na to, kedy niektorý z hráčov naisto prehrá. Pokúsime sa nájsť vyhrávajúce a prehrávajúce pozície pre rôzne počty kameňov v kôpke. Hráč určite prehrá, keď majú na jeho ťahu všetky kôpky len jeden kameň, keďže tie už nejde rozdeliť, a teda tento hráč nevie spraviť ťah. Do tejto situácie vieme hráča dostať, ak si vyberieme kôpku, ktorá má 2-7 kameňov a rozdelíme ju po jednom.

Ďalej si môžeme všimnúť, že kôpka, ktorá má 8 kameňov, sa nedá rozdeliť tak, aby medzi rozdelenými kôpkami nebola žiadna, čo má 2-7 kameňov. Je to tak preto, lebo všetky nové kôpky musia mať menej ako 8 kameňov a nemôžu mať všetky iba 1 kameň, lebo potom by sme potrebovali 8 kôpok. Následne počty 9-14 kameňov v kôpke budú vyhrávajúce, keďže ich vieme rozdeliť tak, že do jednej kôpky dáme 8 kameňov a do zvyšných po jednom, čo sú všetko prehrávajúce počty. Ďalší prehrávajúci stav bude 15, keďže to je počet, ktorý nevieme rozložiť na 2-7 kôpok s počtami 1 alebo 8.

Môžeme si všimnúť, že zatiaľ sú prehrávajúce počty kameňov v kôpke také, ktoré dávajú zvyšok 1 po delení 7. Skúsme preto dokázať, že to tak bude vždy.

Ak má hráč na svojom ťahu len kôpky, ktorých veľkosť má zvyšok 1 po delení 7, nevie ich rozdeliť len na ďalšie kôpky so zvyškom 1. Je to tak preto, lebo takúto kôpku delí na 2-7 nových kôpok, a teda zvyšok súčtu počtov v týchto nových kôpkach po delení 7 by mohol byť len 2, 3, 4, 5, 6 alebo 0 (pri 7 kôpkach).

Naopak, ak má hráč pred sebou nejakú kôpku, ktorej počet kameňov má zvyšok po delení 7 iný ako 1, vie ju určite rozdeliť na kôpky len so zvyškom 1. Ak si označíme zvyšok tejto kôpky n, vie ju rozdeliť na n kôpok so zvyškom 1 (pri zvyšku 0 na 7 kôpok). Jedno z takýchto rozdelení je dať do všetkých kôpok 1 kameň a potom do poslednej pridať všetky ostatné.

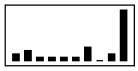
Na začiatku je vo všetkých kôpkach 2024 kameňov. Číslo 2024 dáva zvyšok 1 po delení 7, teda je to prehrávajúci stav. Bia po svojom ťahu musí vždy nechať aspoň jednu kôpku, ktorá má iný zvyšok a Šmili si vždy vie vybrať túto kôpku a rozdeliť ju opäť len na kôpky so zvyškom 1. Keďže sa v každom kroku nejaké kôpky zahodia, počet kameňov sa po každom ťahu zmenší a hra po konečnom počte ťahov skončí. Bia bude mať na svojom ťahu vždy len kôpky o veľkosti so zvyškom 1, teda na konci bude mať pred sebou len kôpky po jednom kameni a prehrá. Víťaznú stratégiu má teda Šmili.

Komentár

Na úlohy tohto typu sa často oplatí najprv pozrieť od konca a rozobrať najjednoduchšie prípady v závere hry. Z toho sa niekedy dá odvodiť všeobecnejšia myšlienka, ktorú už ale treba poriadne dokázať a popísať, ako by sa dala aplikovať od začiatku hry. Väčšina z vás prišla na správnu stratégiu, ale viacerým napríklad chýbali vysvetlenia, prečo Bia svoju kôpku nevie rozdeliť len na kôpky so zvyškom 1 alebo prečo to naopak Šmili vždy vie, čo sú tiež veľmi dôležité časti správneho riešenia.

4.

Opravovali: **Erik Novák a Braňo Ječim**
Počet riešení: 30 Najkrajšie riešenie: **Michal Iľkovič**



Majme postupnosť celých čísel 1 až 2024 v neznámom poradí. V každom kroku vezmeme k prvých členov, kde k je prvý člen postupnosti, a obrátime im poradie. Dokážte, že po niekoľkých operáciách sa na prvé miesto dostane číslo 1.

Riešenie

Úlohu budeme riešiť matematickou indukciou a dokážeme, že na prvé miesto hocijakej postupnosti celých čísel od 1 do n sa po konečnom počte operácii dostane číslo 1.

Ako indukčnú bázu si zvoľme $n = 1$. Tu je úloha automaticky vyriešená, keďže prvým a jediným členom postupnosti je 1.

Náš indukčný predpoklad je, že tvrdenie platí pre akúkoľvek postupnosť od 1 do n, teda, že pre akúkoľvek permutáciu čísel od 1 do n platí, že po konečnom počte operácií sa na prvé miesto dostane číslo 1. Dokážme si, že potom to platí aj pre postupnosť od 1 do $n + 1$:

Pre takúto postupnosť môžu nastať tri situácie:

a) $n + 1$ je na $(n + 1)$. mieste - Číslo $n + 1$ sa nikdy nevyskytne na prvom mieste postupnosti, keďže na to by muselo nastať obrátenie poradia radu o dĺžke aspoň $n + 1$, na čo je potrebné, aby $n + 1$ bolo na začiatku. Pracujeme teda len s postupnosťou od 1 do n, pre ktorú tvrdenie platí z indukčného predpokladu.

b) $n + 1$ je na 1. mieste - V prvom kroku sa obráti poradie celej postupnosti, a preto $n + 1$ bude na $(n + 1)$. pozícii. Dostávame sa do situácie a), ktorá je dokázaná.

c) $n + 1$ je na inom ako prvom alebo poslednom mieste - Pozrime sa na číslo na $(n + 1)$. mieste a nazvime ho m. Teraz si predstavme, že číslo $n + 1$ je vlastne m. V takomto prípade máme na prvých n miestach všetky čísla od 1 po n. Pre túto postupnosť vieme z indukčného predpokladu, že tvrdenie zo zadania platí. Jediné, v čom sa líši táto situácia od indukčného predpokladu je prípad, v ktorom sa číslo m vyskytne na 1. mieste. Ak sa to nestane predtým, než sa na 1. mieste vyskytne číslo 1, úloha je dokázaná. Ak sa to stane, dostali sme sa do prípadu b), ktorý je dokázaný.

Keďže sme úlohu dokázali pre akékoľvek n, bude to platiť aj pre postupnosť 1 až 2024.

Iné riešenie

Počet všetkých možných permutácií postupnosti zo zadania je 2024!, čo je konečný počet. Z každej permutácie, okrem prípadov, kde $k = 1$, sa obrátením poradia prvých k členov permutácia jednoznačne zmení na inú permutáciu. Zadanú úlohu si môžeme preto definovať ako orientovaný graf postupností, kde každá permutácia je vrchol a z každého vrcholu sa vieme prechodom po hranách dostať do nejakého vrcholu, kde $k = 1$.

Ostáva nám už len dokázať, že sa takýto prechod v nijakom bode nemôže zacykliť, samozrejme okrem $k = 1$, kde síce je nekonečný cyklus obracania poradia jednotky, ale úloha už je v tom momente splnená.

Dokážme to sporom, a to tak, že si povedzme, že taký cyklus existuje. Potom vieme, že v takom cykle sa na pozícii k strieda niekoľko rôznych čísel. Z nich vieme jednoznačne určiť to najväčšie, označme si ho m. Keď sa m dostane na pozíciu k, tak je obrátením poradia prehodené na m. pozíciu. Potom každé iné číslo z tohto cyklu, ktoré sa na k.-te miesto dostane, je najviac $m-1$, preto bude môcť obrátiť najviac prvých $m-1$ čísel, a teda m by sa už znovu v cykle nevyskytlo. To ale popiera existenciu tohto cyklu, preto máme spor a takýto cyklus existovať nemôže.

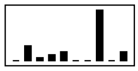
Z toho vyplýva, že sa po konečnom počte operácií dostane číslo 1 na prvé miesto postupnosti a dôkaz úlohy je hotový.

Komentár

K riešeniu ste pristúpili viacerými rôznymi spôsobmi, čo nás nie len prekvapuje, ale aj veľmi teší! Zároveň je potrebné spomenúť, že táto úloha bola viacej „abstraktná“ - teda najväčší jej problém nebolo si vizualizovať správne riešenie, ale dostatočne exaktne ho napísať na papier. Pri strete s takými úlohami nezabúdajte na dávno známe spôsoby dokazovania, hlavne teda na spor a indukciu.

5.

Opravoval: **Michal Masrna**
Počet riešení: 31 Najkrajšie riešenia: **Alena Chladná a Eva Krajčiová**



Nájdite všetky funkcie f na kladných reálnych číslach také, že pre každé kladné reálne a, b, c, d spĺňajúce $abcd = 1$ platí

$$(f(a)+f(b))(f(c)+f(d)) = (a+b)(c+d).$$

Riešenie

Keďže rovnosť zo zadania platí pre každé kladné reálne a, b, c, d spĺňajúce $abcd = 1$, platí špeciálne pre každé $a = b = x$ a $c = d = \frac{1}{x}$, kde x je ľubovoľné kladné reálne číslo:

$$\begin{aligned}
(f(x)+f(x))\left(f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= (x+x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)\\
(2f(x))\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= (2\cdot x)\left(2\cdot\frac{1}{x}\right)\\
4\cdot f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right) &= 4\\
f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right) &= 1\\
f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{f(x)} \qquad (1)
\end{aligned}$$

V poslednej úprave sme mohli deliť výrazom $f(x)$, pretože hľadáme funkciu na kladných číslach. Výsledná rovnosť platí pre všetky kladné reálne čísla x.

Ďalej dosaďme do rovnosti zo zadania $a = c = x$ a $b = d = \frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}
\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\\
\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^2\\
f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right) &= x+\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Posledná úprava je ekvivalentná, keďže oba výrazy pod mocninou boli kladné. Dosaďme teraz $f\left(\frac{1}{x}\right)$ z (1):

$$\begin{aligned}
f(x)+\frac{1}{f(x)} &= x+\frac{1}{x}\\
f(x)^2+1 &= \left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot f(x)
\end{aligned}$$

$$f(x)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot f(x) + 1 = 0$$

Dostali sme kvadratickú rovnicu pre výraz $f(x)$. Spočítaním jej koreňov dostávame:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right) \pm \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4}}{2} \\
f(x) &= \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right) \pm \sqrt{x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 4}}{2} \\
f(x) &= \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right) \pm \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}{2} \\
f(x) &= \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right) \pm \left(x - \frac{1}{x}\right)}{2}
\end{aligned}$$

A teda pre všetky kladné reálne x buď $f(x) = x$ (ak je v čitateli $+$) alebo $f(x) = \frac{1}{x}$. V tomto bode je veľmi jednoduché urobiť chybu a prehlásiť úlohu za dokončenú s tým, že sme ukázali, že podmienky zadania spĺňa iba funkcia $f(x) = x$ a funkcia $f(x) = \frac{1}{x}$. Treba si však uvedomiť, že zatiaľ sme iba ukázali, že pre každé kladné reálne x je hodnota $f(x)$ buď x alebo $\frac{1}{x}$ a nie, že to je rovnako pre všetky kladné reálne čísla. Inými slovami, zatiaľ nevieme vylúčiť funkcie, ktoré pre niektoré x majú hodnotu x a pre iné hodnotu $\frac{1}{x}$.

Poďme teda sporom ukázať, že takéto funkcie nemôžu spĺňať podmienky zadania. Predpokladajme, že existujú $x, y \neq 1$ také, že $f(x) = x$ a $f(y) = \frac{1}{y}$. Po dosadení $a = x, b = y, c = \frac{1}{x}, d = \frac{1}{y}$ do rovnosti zo zadania:

$$(f(x) + f(y))\left(f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right)\right) = (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

Po dosadení z (1):

$$\begin{aligned}
(f(x) + f(y))\left(\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}\right) &= (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \\
\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + y\right) &= (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \\
1 + xy + \frac{1}{xy} + 1 &= 1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1 \\
xy + \frac{1}{xy} - \frac{x}{y} - \frac{y}{x} &= 0 \\
(xy)^2 + 1 - x^2 - y^2 &= 0 \\
(x^2 - 1)(y^2 - 1) &= 0
\end{aligned}$$

Z čoho plynie buď $x = 1$ alebo $y = 1$, čo je ale v spore s našim predpokladom $x, y \neq 1$. Ostávajú teda jediné dve možnosti a to $f(x) = x$ pre všetky kladné reálne x alebo $f(x) = \frac{1}{x}$ pre všetky kladné reálne x. Jednoduchou skúškou overíme, že obe možnosti sú správne:

$$\begin{aligned}
(f(a) + f(b))(f(c) + f(d)) &= (a + b)(c + d) \\
(a + b)(c + d) &= (a + b)(c + d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f(a) + f(b))(f(c) + f(d)) &= (a + b)(c + d) \\
\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) &= (a + b)(c + d) \\
\left(\frac{a + b}{ab}\right)\left(\frac{c + d}{cd}\right) &= (a + b)(c + d) \\
\frac{(a + b)(b + c)}{abcd} &= (a + b)(c + d) \\
\frac{(a + b)(b + c)}{1} &= (a + b)(c + d) \\
(a + b)(b + c) &= (a + b)(c + d)
\end{aligned}$$

Komentár

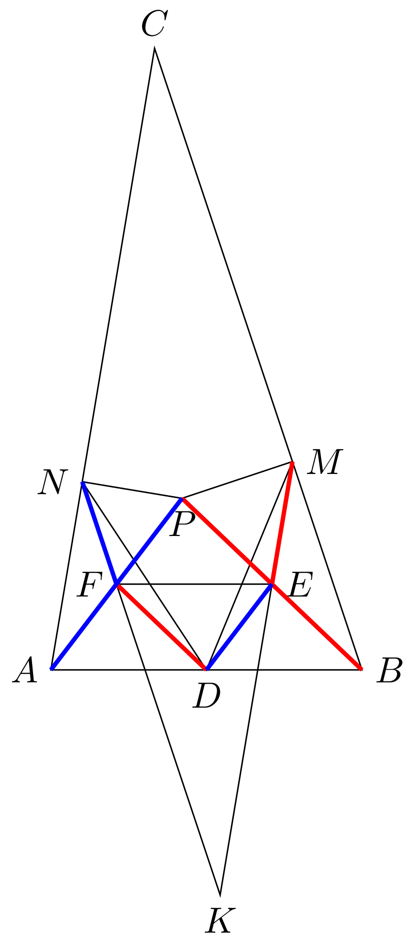
Ako bolo spomenuté vo vzoráku, v riešení bolo veľmi jednoduché prehliadnuť možnosť, že by funkcia naberala niekedy hodnoty x a niekedy hodnoty $\frac{1}{x}$. Na tomto bohužiaľ dva body stratila väčšina z vás. Premyslite si preto nabudúce poriadne, akú podmienku ste práve odvodili – čím poctivejšie si to zapíšete, tým väčšia šanca, že si všimnete, že úloha ešte nie je dokončená.

6.

Opravovali: **Gertrúda „Mimi“ Hanusová a Matúš Masrna**
Počet riešení: 11 Najkrajšie riešenia: **Eva Krajčiová a Richard Vodička**

Nech ABC je ostrouhlý trojuholník, kde AB je najmenšia strana a D je stred AB. Nech P je bod vo vnútri trojuholníka ABC taký, že $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle ACB|$. Z bodu P veďme kolmé čiary na BC a AC, priesečník s BC označme M a priesečník s AC označme N. Cez bod M veďme priamku rovnobežnú s AC a cez bod N priamku rovnobežnú s BC. Tieto priamky sa pretínajú v bode K. Dokážte, že D je stred kružnice opísanej trojuholníku MNK.

Riešenie



Vďaka rovnobežnosti $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ANK| = |\sphericalangle BMK| = |\sphericalangle MKN|$, sú to súhlasné a striedavé uhly. Označme tento uhol κ. Zo zadania aj $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CBP| = \kappa$.

Označme E a F stredy úsečiek BP a AP v tomto poradí. Teraz po prvé DEF je trojuholník stredných priečok v trojuholníku PAB, teda trojuholníky DEF, ADF, BED a PFE sú zhodné. Po druhé E (F) je stred prepony v pravouhlom trojuholníku BMP (APN), čiže z Tálesovej vety stred jeho opísanej kružnice.

Odtiaľ $|BE| = |EM| = |EP| = |DF|$ a $|AF| = |FN| = |FP| = |DE|$, čo máme na obrázku vyznačené farebne. Trojuholníky BME a AFN sú rovnoramenné s uhlom pri základni κ, takže $|\sphericalangle BME| = |\sphericalangle BMK|$ a $|\sphericalangle ANF| = |\sphericalangle ANK|$. Keďže K leží na tej istej strane BC ako E a na tej istej strane AC ako F, leží na polpriamkach ME a NF. Z rovnobežností $|\sphericalangle KED| = |\sphericalangle CAP| = \kappa$ a $|\sphericalangle KFD| = |\sphericalangle CBP| = \kappa$.

Z farebných zhodností a $|\sphericalangle DEM| = |\sphericalangle DFN| = 180° - \kappa$ plynie, že trojuholníky MED a DFN sú zhodné podľa vety sus a súčet dvoch ich neznámych vnútorných uhlov je κ.

Zo súčtu vnútorných uhlov v trojuholníkoch ABP a ABC

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle APB| &= 180° - |\sphericalangle BAP| - |\sphericalangle ABP| \\
&= 180° - (|\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle CAP|) - (|\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle CBP|) \\
&= (180° - |\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle ABC|) + |\sphericalangle CAP| + |\sphericalangle CBP| \\
&= |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle CAP| + |\sphericalangle CBP| \\
&= 3\kappa
\end{aligned}$$

a ďalej

$$|\sphericalangle MDN| = |\sphericalangle EDF| - |\sphericalangle EDM| - |\sphericalangle FDN| = |\sphericalangle EPF| - (|\sphericalangle EDM| + |\sphericalangle FDN|) = 3\kappa - \kappa = 2\kappa.$$

Trojuholník DMN je rovnoramenný s uhlom oproti základni $2\kappa = 2|\sphericalangle MKN|$, z čoho už podľa vety o stredovom uhle vyplýva, že D je stred kružnice opísanej KMN (keby sme hľadaný stred opísanej kružnice označili S, trojuholník SMN by bol podobný, a teda totožný s DMN).

Komentár

Každé úplné riešenie, ktoré sme dostali, postupovalo inak a takmer úplné riešenie iba s izolovanými chybami sme nedostali žiadne. Na druhej strane sme celkovo riešení dostali iba jedenásť. Preto môžeme povedať, že jedinou častou chybou pri tejto úlohe bolo neriešiť ju!

Zadania úloh zimného semestra 49. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na `seminar.strom.sk`.

2 Druhá séria

Termín odovzdania riešení: **25. novembra 2024**

Ak nevieš pohnúť ďalej s niektorou z úloh, skús sa pozrieť na pár tipov, ktoré nájdeš na našej webovej stránke `seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf`.

1. Číslo nazývame k-rásne, ak ho vieme zapísať ako súčet k po sebe idúcich kladných celých čísel (napríklad číslo 9 je 2-rásne, pretože $9 = 4 + 5$, a zároveň je 3-rásne, pretože $9 = 2 + 3 + 4$).
   a. Koľko čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2024\}$ je naraz 3-rásnych, 4-rásnych a 5-rásnych?
   b. Existujú nejaké kladné celé čísla, ktoré sú naraz 3-rásne, 4-rásne, 5-rásne a 6-rásne?

2. Majme postupnosť kladných celých čísel $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ Pre všetky kladné celé k platí $a_{a_k} = 3k$.
   a. Určte a_{1000}.
   b. Určte a_{2024}.

3. Nech S je podmnožina množiny $M = \{1, 2, \ldots, 100\}$. Dokážte, že v S existujú tri rôzne dvojice čísel s rovnakým rozdielom, ak S má
   a. 21 prvkov,
   b. 20 prvkov,
   c. 19 prvkov.

4. Nech D, E sú body na strane AB trojuholníka ABC také, že

$$\frac{|AD| \cdot |AE|}{|BD| \cdot |BE|} = \left(\frac{|AC|}{|BC|}\right)^2.$$

Ukážte, že uhly ACD a BCE sú zhodné.

5. Nájdite všetky prvočísla p, pre ktoré existuje kladné celé číslo a také, že platí

$$\left\lfloor \frac{a}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3a}{p} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{pa}{p} \right\rfloor = 2024.$$

Pozn.: Hodnota $\lfloor x \rfloor$ sa rovná najväčšiemu celému číslu, ktoré nie je väčšie ako x.

6. Postupnosť reálnych čísel $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ spĺňa $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{k+1} = -a_k + \frac{1}{2-a_k}$ pre všetky kladné celé čísla k. Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla n platí

$$\left(\frac{n}{2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} - 1\right)^n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n \left(\frac{1}{a_1} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2} - 1\right) \ldots \left(\frac{1}{a_n} - 1\right).$$

Poradie po 1. sérii zimného semestra 49. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1. - 2.	Lucia Chladná	S4	GAMČABA	9	9	9	9	9	9	0	54
	Eva Krajčiová	S3	GAlejKE	9	9	9	9	9	9	0	54
3. - 4.	Alenka Bálintová	S2	BGMHSuč	9	9	9	9	7	-	0	52
	Michal Vodička	S2	GAlejKE	9	9	9	9	7	-	0	52
5.	Richard Vodička	S4	GAlejKE	9	9	9	8	7	9	0	51
6.	Ján Meteňko	S1	GPoštKE	9	5	9	9	7	-	0	48
7. - 10.	Oliver Seman	S3	GAlejKE	9	9	9	9	7	-	0	43
	Tomáš Sukeľ	S3	GAGLSHE	9	9	9	9	7	-	0	43
	Matúš Libák	S4	GAlejKE	9	9	9	9	7	-	0	43
	Sarah Klopstock	S2	ŠpMNDaG	9	4	7	9	7	-	0	43
11.	Magdaléna Škriabová	S1	GPoštKE	9	5	9	9	1	-	0	42
12.	Nina Hudáková	S1	GAlejKE	9	5	9	6	2	-	0	40
13.	Jakub Stramba	S1	GŠrobKE	9	3	9	2	7	0	0	39
14. - 15.	Marek Horváth	S4	GKonšPO	9	3	9	9	7	-	0	37
	Lívia Lukáčová	S1	GŠrobKE	9	4	8	3	4	4	0	37
16. - 17.	Alena Chladná	Z9	GAMČABA	9	9	-	-	9	-	0	36
	Matúš Pokorný	S3	GAMČABA	9	5	9	9	4	-	0	36
18.	Ondrej Králik	S4	GAlejKE	9	9	9	8	-	-	0	35
19.	Lívia Sušková	S1	GPoštKE	9	4	7	6	1	-	0	34
20.	Marie Kasalová	S1	GJGJPha	9	9	6	-	-	-	0	33
21.	Veronika Vodičková	S4	GAlejKE	9	9	5	9	-	-	0	32
22.	Martin Dudjak	S4	SMládPP	9	5	9	1	7	-	0	31
23.	Natália Poliačiková	S4	GPoštKE	9	9	9	-	1	-	0	28
24.	Richard Prikler	S2	GJARMPO	3	9	1	4	7	-	0	27
25.	Michal Iľkovič	S4	GSMTŠPO	-	-	-	9	7	9	0	25
26. - 28.	Martina Osuská	S2	GJHN3BA	3	5	5	1	7	-	0	24
	Veronika Jakabová	S3	GAlejKE	9	9	-	6	-	-	0	24
	Filip Findorák	S3	GŠrobKE	9	8	-	-	7	-	0	24
29.	Eva Hricová	S1	GAlejKE	6	6	3	-	1	-	0	22
30.	Janka Urbánová	S2	GAlejKE	3	9	-	9	-	-	0	21
31. - 32.	Daniel Ryan Takáč	S1	GAlejKE	7	3	5	-	-	-	0	20
	Michal Revický	Z9	GJARMPO	9	-	1	5	-	-	0	20
33. - 34.	Michal Ferdinandy	S2	GPoštKE	2	9	-	-	7	-	0	18
	Martin Vrba	S2	GPoštKE	9	9	-	-	-	-	0	18
35. - 36.	Nina Anna Betáková	S3	GAGLSHE	9	4	1	-	3	0	0	17
	Kalista Semancová	S4	GAGLSHE	9	3	1	-	4	0	0	17
37.	Ondrej Tóth	S2	SPITKM	9	5	0	-	1	-	0	15
38.	Tomáš Saksun	S1	GAlejKE	4	6	-	0	-	-	0	14
39.	Alexander Košťál	S3	GJarBrno	-	5	-	-	7	-	0	12
40.	Natália Tkáčová	S3	SMládPP	2	3	-	6	-	-	0	11
41.	Juraj Kramár	S4	GAlejKE	-	9	-	-	-	-	0	9
42. - 44.	Maxima Anna Alžbeta Bednarčíková	S4	GŠrobKE	7	-	-	-	-	-	0	7
	Sophia Sotáková	S1	GAGLSHE	1	4	1	-	-	0	0	7
	Adam Bukovan	S1	SSRodBA	1	1	0	1	3	0	0	7
45. - 46.	Lukáš Kostík	S1	GAlejKE	-	-	5	-	-	-	0	5
	Richard Suďa	S2	GVaršZA	-	5	-	-	-	-	0	5
47.	Šimon Klčo	S1	GJBMTT	1	0	0	0	-	0	0	1

Názov:	Strom – korešpondenčný matematický seminár Číslo 2 • November 2024 • Zimný semester 49. ročníka (2024/2025)
Web:	`seminar.strom.sk`
E-mail:	`seminar.strom@strom.sk`
Riešenia:	Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese `riesenia.strom@strom.sk`.
Vydáva:	Združenie Strom, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web:	`zdruzenie.strom.sk`
E-mail:	`info@strom.sk`
Autori vzorových riešení:	Ján Richnavský, Miriam Horváthová, Lujza Milotová, Štefan Vašak, Patrik Paľovčík, Martin Šmilňák, Erik Novák, Branislav Ječim, Michal Masrna, Matúš Masrna, Gertrúda Mimi Hanusová

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.