

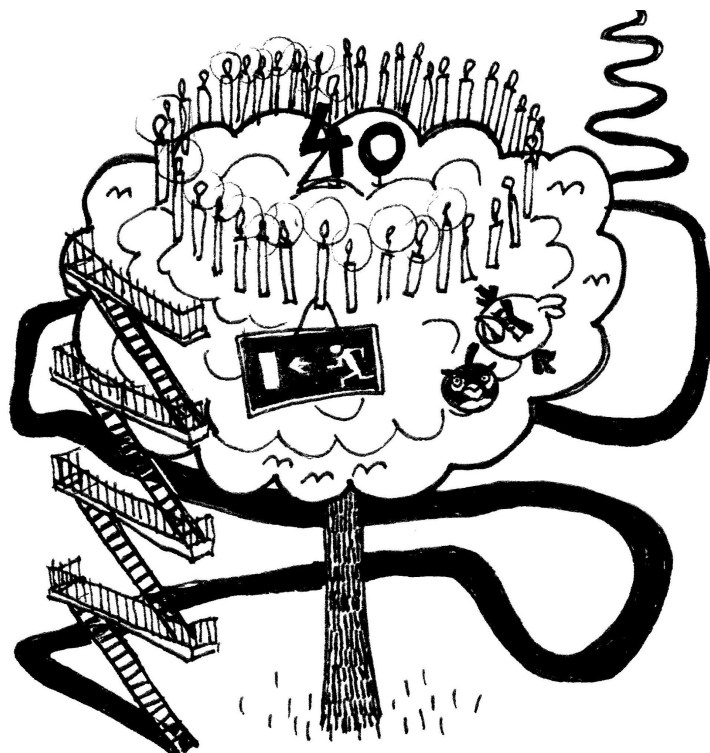
STROM

Korešpondenčný matematický seminár

Zdravičko!

všetkým Stromákom a Stromáčkam. Váš obľúbený korešpondenčný seminár, samozrejme, že myslím STROM, oslavuje práve krásne 40. narodeniny. Jeho letokruhy však ešte nie sú zrátané, a tak na jeho počesť pozdvihnime čaše plné vedomostí a vyrátajme ďalšiu skvelú sériu príkladov. Vela šťastia a úspechov želáme aj STROMu, aj vám, pri rátaní!

Vaši **STROM**isti



Čo je seminár STROM?

Seminár **STROM** (Súťaž **T**alentovaných **R**iešiteľov **O**blubujúcich **M**atematiku), organizovaný Združením **STROM**, je pokračovateľom najstaršej súťaže svojho druhu v bývalom Česko-Slovensku, ktorá vznikla pod názvom Korešpondenčný matematický seminár v roku 1976 v Košiciach. Tento seminár je *bezplatný* a je určený najmä pre študentov stredných škôl, no do riešenia sa kludne môžu zapojiť aj mladší. Každý školský rok čakajú na riešiteľov dva semestre, v ktorých dostanú zadania dvoch sérií príkladov. Tí najlepší riešitelia sa potom dostanú na týždňové sústredenie a zažijú veľa zábavy. Sústredenia na konci semestrov majú byť pre žiakov odmenou a zároveň motiváciou pre pokračovanie a zlepšovanie sa v riešení matematických seminárov. Samotná korešpondenčná časť je v priebehu roka dopĺňovaná rôznymi akciami. Každoročne organizujeme Matboj, matematickú súťaž pre družstvá, ale aj zábavné hry, výlety alebo športové stretnutia. Naším cieľom je ukázať žiakom krásu matematiky, niekedy aj netradičným a hravým spôsobom. Preto dúfame, že náš seminár a s ním spojené akcie si nájdu svojich stálych nadšencov v radoch žiakov, ale aj podporovateľov v radoch učiteľov.

Košický Matboj

Už 15. ročník tejto súťaže sa uskutoční 16. októbra 2015 v CVČ Domino v Košiciach. Inštrukcie k prihlasovaniu na túto súťaž budú rozposlané na školy v druhej polovici septembra. Ak ste o súťaži doposiaľ nepočuli a radi by ste sa dozvedeli viac, zavítajte na <http://seminar.strom.sk/matboj/>.

Matematický krúžok?

Aj v školskom roku 2015/2016 sa na **Prírodovedeckej fakulte UPJŠ** v Košiciach na Jesennej 5 bude konať v prípade dostatočného záujmu každý týždeň matematický krúžok, ktorý bude zameraný hlavne na prípravu na Matematickú olympiádu v kategóriách A, B a C.

Krúžku sa môže zúčastniť ktorýkoľvek stredoškôlak (ale i šikovný základškôlak), ktorý sa chce venovať Matematickej olympiáde. Ak máš o krúžok záujem, hoc len hypotetický, tak sa zapoj do ankety v novinkách na našej stránke. Viac o MO v Košickom kraji ako aj o matematických krúžkoch sa dozvieš na stránke <http://umv.science.upjs.sk/mo>

Pokyny pre riešiteľov

Seminár je určený pre žiakov prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. STROM je súťaž jednotlivcov.

Prihlásenie do semestra prebieha online, na našej webovej stránke <http://seminar.strom.sk>. Ak si novým riešiteľom, alebo ešte nemáš vytvorený účet, zaregistruj sa a vyplň povinné údaje v užívateľskom profile - odkaz **Aktualizovať profil** v sekcii **Správa účtu**. Tieto údaje potrebujeme, aby sme sa s Tebou mohli skontaktovať aj v čase, keď nie si v škole (prázdniny, ...), v prípade pozývania na sústredenie a tiež, aby sme ňa mohli uverejniť v poradí riešiteľov aktuálnej časti semináru. Na tejto stránke nájdeš takisto svoje opravené a obodované riešenia, bez ohľadu na to, ako si ich poslal. Prihláška (vyplnenie profilu) je **povinná pre všetkých riešiteľov**. Úlohy, ktoré sa nedajú priradiť k užívateľovi s korektne vyplneným profilom, **nebudú opravené**.

Úlohy riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeníach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Svoje riešenia môžete poslať poštou alebo cez našu webovú stránku, nie odovzdávať osobne. Pri opravovaní sa držíme zásady, že čo sa nedá prečítať, nemôže byť ohodnotený bodmi. Preto zväzťe, či nenapíšete svoje riešenia na počítači. Riešenia poštou zasielajte do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) na adresu

PF UPJŠ
STROM
Jesenná 5
041 54 Košice.

Elektronické odovzdávanie je možné do uvedeného termínu cez nový webový portál na stránke seminar.strom.sk. Súbor s riešením odovzdáte jednoducho po prihlásení do svojho užívateľského účtu - tlačidlo **Odovzdať** pri konkrétnom príklade v sekcii **Príklady**. Úlohy odovzdávajte primárne vo formáte PDF, portál na vaše riziko zvládne aj konverziu z iných formátov ako je JPG, PNG, či DOC.

V prípade technických problémov na našej strane posielajte na e-mailovú adresu riesenia@strom.sk vo formáte PDF.

Riešenie každej úlohy píšete na samostatný papier **formátu A4**, respektíve do samostatného súboru, na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás prostredníctvom komentárom k úlohám na našej stránke, cez e-mail strom@strom.sk alebo osobne.

Bodovanie úloh závisí od kvality riešenia. Za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 9 bodov. Body môžete získať aj za čiastočné vyriešenie zadaných úloh. Preto sa nebojte poslať aj svoje neúplné riešenia. Do celkového poradia sa započítavajú body takto:

- štvrtáci, oktáva:** všetky vyriešené úlohy
- tretiaci, septíma:** všetky vyriešené úlohy
- druháci, sexta:** päť najlepšie vyriešených úloh plus minimum z týchto piatich úloh
- prváci, kvinta a mladší:** päť najlepšie vyriešených úloh plus maximum z týchto piatich úloh

Príklad použitia pravidiel:

Štyria bratia, štvrták Vlado, tretiak Fero, druhák Jaro a prvák Marcel, vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) za 3, 2, 4, 1, 5 a 4 body. Vlado potom získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Fero tiež získal $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$ bodov, Jaro $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 2 = 20$ bodov a Marcel $(3 + 2 + 4 + 5 + 4) + 5 = 23$ bodov. Jasné, nie?

Varovania (!!!). Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie a za poslanie riešení po termíne. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od rozoslania riešení zaslať poštou sťažnosť a tá bude prešetrená.

Sústredenie je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastnia sa ho najlepší riešitelia podľa záverečného poradia a členovia minimálne prvých troch najlepších družstiev z matboja, ak sa v príslušnom polroku koná. Sústredenie je určené najmä pre študentov stredných škôl (a im príslušných ročníkov na osemročnom gymnáziu), mladší žiaci (tí, ktorí počas sústredenia nie sú stredoškôlkami) sú pozvaní ako náhradníci. Ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia **STROMu** a matboja; nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou.

Zadania úloh zimného semestra 40. ročníka

1 Prvá séria

Termín odoslania riešení: **12. 10. 2015**

1. Nájdite všetky trojice prvočísel p, q, r , pre ktoré platí:

$$\frac{14}{p} + \frac{51}{q} = \frac{65}{r}.$$

2. Sto účastníkov sa rozdelilo do troch družiniek – Korene, Miazga a Stonka. Neskôr jedno dieťa z Koreňov prestúpilo do Miazgy, jedno z Miazgy do Stonky a jedno zo Stonky do Koreňov. Priemerná hmotnosť v družstve Korene sa zvýšila o 120 gramov, v družinke Miazga o 130 gramov, zatiaľčo v družinke Stonka sa znížila o 240 gramov. Koľko členné družinky sme na sústredku mali?
3. Body na obvode rovnostranného trojuholníka sú ofarbené dvoma farbami (modrou a červenou). Dokážte, že medzi nimi existujú tri body rovnakej farby, ktoré tvoria vrcholy pravouhlého trojuholníka.
4. Matúš a Janka hrajú takúto hru: Matúš ako prvý hráč postaví na šachovnicu kráľa a urobí s ním ťah (podľa pravidiel šachu). Potom Janka a Matúš striedavo pohybujú kráľom tak, že je zakázané postaviť ho na políčka šachovnice, na ktorých už stál. Prehráva ten, kto už nemôže urobiť žiaden ťah. Kto z nich má víťaznú stratégiu? Popíšte ju.
5. Nech je daná kružnica k so stredom O . Na predĺžení tetivy KL kružnice k leží bod A . Dotyčnice z bodu A ku kružnici k sa jej dotýkajú v bodoch T, U . Označme M stred úsečky TU . Ukážte, že štvoruholník $KLMO$ je tetivový.
6. Majme funkciu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pre ktorú platí $x + f(x) = f(f(x))$, pre všetky reálne čísla x . Nájdite všetky riešenia rovnice $f(f(x)) = 0$ v premennej x .

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **16. 11. 2015**

1. Riško a Šiško hrajú na šachovnici 10×10 nasledujúcu hru. Ten, kto je práve na ťahu, si zvolí jeden z riadkov alebo stĺpcov, ktoré neboli doteraz v hre zvolené a všetky políčka v ňom si prefarbí na svoju farbu (Riško má ružovú a Šiško šedú). Riško začínal a v ťahoch sa striedajú. Hra končí, keď už bol každý riadok aj stĺpec zvolený. Nájdite pre Šišku takú stratégiu, pri ktorej na konci hry bude aspoň o 10 šedých políčok viac ako ružových.
2. Nech je dané celé číslo z . Dokážte, že rovnice

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= z, \\x^2 + y^2 &= 2z.\end{aligned}$$

majú rovnaký počet riešení na množine celých čísel.

3. Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené n existuje číslo zostavené len z cifier 1 a 2, ktoré je deliteľné 2^n .
4. Skonstruujte pravouhlý trojuholník ABC s danou preponou c taký, že dĺžka ťažnice vychádzajúcej z vrchola C je geometrický priemer dĺžok zvyšných dvoch odvesien.
5. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla také, že $a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \leq 4$. Dokážte, že

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3.$$

6. Nech A je množina kladných prirodzených čísel s aspoň dvoma prvkami. Pre každé dve čísla a, b z množiny A také, že $a > b$ platí, že aj

$$\frac{nsn(a, b)}{a - b} \in A,$$

kde $nsn(a, b)$ je najmenší spoločný násobok čísel a a b . Dokážte, že množina A má práve dva prvky.

Mohlo by sa hodiť...

Mocnosť bodu ku kružnici: Majme v rovine bod M a danú kružnicu k so stredom S a polomerom r . Mocnosťou bodu M ku kružnici k nazývame reálne číslo $m = v^2 - r^2$, kde $v = |MS|$. Dá sa ukázať, že ak je bod M vo vonkajšej (resp. vnútornej) oblasti kružnice, a p je ľubovoľná priamka prechádzajúca bodom M , ktorá pretína kružnicu k v bodoch P, Q , tak platí $m = |MP| \cdot |MQ|$ (resp. $m = -|MP| \cdot |MQ|$). Pre dotýčnicu ku k z bodu M dotýkajúcu sa kružnice k v bode T platí $m = |MT|^2$. Je zaujímavé, že tento súčin je rovnaký bez ohľadu na priamku p a je určený len bodom M a kružnicou k .

Taktiež platí opačná implikácia. Pre jednoduchosť ju sformulujeme len pre prípad, že M leží mimo kružnice. Ak je daný bod M a P, Q, R, S sú štyri body ležiace všetky (neformálne povedané na jednu stranu od M) v rovnakej polrovine určenej nejakou priamkou prechádzajúcou bodom M . Platí, že ak $|MP| \cdot |MQ| = |MR| \cdot |MS|$, tak body P, Q, R, S ležia na jednej kružnici. Viac o tejto téme sa môžete dozvedieť napr. z materiálu:

<https://mks.mff.cuni.cz/library/MocnostAChordalyJT/MocnostAChordalyJT.pdf>

Tálesova veta: Trojuholník ABC je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C práve vtedy, keď AB je priemerom jeho opísanej kružnice.

AG - nerovnosť: Pre kladné reálne čísla a_1, a_2, \dots, a_n platí, že ich aritmetický priemer je väčší, nanajvýš rovný, ako ich geometrický priemer, t.j.

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}.$$

Matematická indukcia: Ak sa snažíme niečo dokázať pre všetky prirodzené čísla počnúc niektorým, stačí nám ukázať platnosť nášho tvrdenia pre toto počiatočné číslo a potom ukázať platnosť tvrdenia: „ak naše tvrdenie platí pre číslo n , potom platí aj pre číslo $n + 1$ “.

Funkcionálne rovnice: Sú skoro ako obyčajné rovnice, až na to, že neznáma, ktorú hľadáme nie je číslo, ale funkcia. Viac o tejto téme sa môžete dozvedieť hľadaním na internete alebo napr. z veľmi priateľského materiálu vhodného najmä pre nováčikov v tejto oblasti:

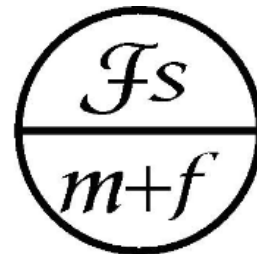
http://www.kms.sk/mazo/matematika/funkcionalne_rov.pdf

Za podporu a spoluprácu ďakujeme



NADÁCIA

Allianz



Názov	STROM – korešpondenčný matematický seminár Číslo 1 • September 2015 • Zimný semester 40. ročníka (2015/2016)
Internet:	http://seminar.strom.sk
E-mail:	strom@strom.sk
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet:	http://www.strom.sk/zdruzenie/onas
E-mail:	rada@strom.sk