

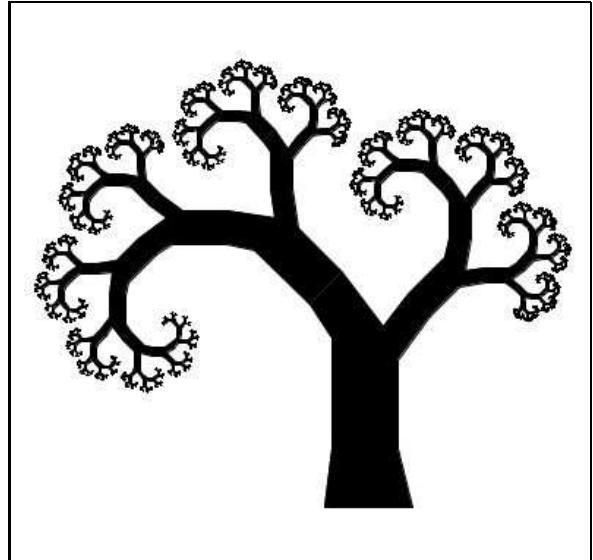


Milí mladí priatelia!

Jar už neodbytno klope na dvere, a teda prichádza čas, kedy sa k životu prebúda príroda, vrátane STROMu. Tak, ako sa spod snehu objavia prvé jarné kvety, ako sa stromy v lese ošatia novým lístím, ako sa začne ozývať vtáčí spev, tak sa objavuje nové číslo STROMu. Je odeté do nových úloh a Vy, milí naši nádejní riešitelia, sa začnete ozývať radostnými výkrikmi: „To sa dá?!“, „Ja hlupák, veď to je jasné!!!“, „Kto vymyslel túto úlohu!?!“, a podobne.

Pripravili sme pre Vás opäť dve série úloh. Dúfame, že Vás zaujmú a tešíme sa, že nám pošlete stovky krásnych, originálnych, nápaditých, vtipných, no proste Vašich riešení.

Vaši **STROM**isti



2% z daní

Tak, ako po minulé roky aj tento rok môžu všetky fyzické i právnické osoby darovať 2% z dane z príjmu niektorým organizáciám. Medzi prijímateľov 2% patrí aj Združenie STROM. Naše združenie tieto peniaze využíva hlavne na dotovanie sústredení najlepších riešiteľov. Ak máte vo svojom okolí kohokoľvek, kto váha, komu má jeho pár korún z 2% poputovať, prosíme Vás, poraďte mu, aby pouvažoval o Združení STROM. Všetky potrebné údaje, postupy a tlačivá nájdete na stránke zdruzenie.strom.sk.

Prvý jarný výlet

sa uskutoční v sobotu, 18. marca 2006. Zraz bude o 8:00 na autobusovej stanici v Košiciach, odkiaľ z nástupišťa z čísla 20 o 8:20 pôjdeme do Prešova. Planovaná trasa je Košice - Prešov - Vranov nad Topľou - zručaniny hradu Čičva. Prešovčania a ľudia z blízkeho okolia Prešova sa k nám môžu pridať v Prešove, odkiaľ nám už o 9:00 odchádza autobus do Vranova. Bude to natesno, ale keď nikto nebude meškať, mali by sme to stihnúť. Keďže pôjdeme autobusmi, na cestu si okrem jedla a dobrej nálady pribaľte košičania 250 Sk a prešovčania 150 Sk. Plánovaný návrat je ešte v ten istý deň a za vidna.

STROM — Súťaž Talentovaných Riešiteľov Oblubujúcich Matematiku je pokračovateľom najstaršej súťaže svojho druhu v bývalom Česko-Slovensku, ktorá vznikla pod názvom Korešpondenčný matematický seminár v roku 1976 v Košiciach. Je určený žiakom stredných škôl, ktorí majú záľubu v matematike a radi riešia neštandardné a zaujímavé úlohy.

Prebieha korešpondenčnou formou, čo znamená, že riešitelia pošlú do stanoveného termínu (svoje vlastné) riešenia úloh organizátorom. V priebehu niekoľkých týždňov ich dostanú späť, ale už s opravenými chybami a s počtom bodov, ktoré za úlohy získali.

V časopise, ktorý súťaž sprevádza, je ku každej úlohe uvedený komentár a stručný návod na riešenie. Už sa stalo tradíciou, že neuverejňujeme priebežné poradie, pretože chceme, aby pre riešiteľov boli výzvou samotné úlohy a nie ostatní riešitelia. Po uzavretí semestra, teda **dvoch sérií**, zverejníme celkové poradie a tí najlepší sa zúčastnia týždňového matematického sústredenia v niektorom rekreačnom zariadení na Slovensku.

POKYNY PRE RIEŠITEĽOV

Riešiteľmi môžu byť žiaci prvého až štvrtého ročníka stredných škôl a príslušných tried osemročných a bilingválnych gymnázií. Zapojiť sa môžu aj žiaci z nižších ročníkov; v súťaži majú rovnaké podmienky a výhody ako prváci. STROM je súťaž jednotlivcov.

Úlohy riešte zásadne samostatne, neodpisujte, v riešeníach vysvetľujte celý svoj myšlienkový postup ako v Matematickej olympiáde. Zasielajte ich **poštou (!!!)**, **nie osobne** do uvedeného termínu (rozhoduje dátum poštovej pečiatky) organizátorom na adresu:

STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1.

S prvou sériou, ktorej riešenia nám posielate, pošlite vyplnenú **prihlášku**. Riešenie každej úlohy píšete na samostatný papier **formátu A4** na výšku s **menom, školou, triedou a číslom úlohy**. Ak by vám nebolo jasné zadanie niektorej úlohy, obráťte sa na nás cez e-mail **strom@strom.sk**, prostredníctvom debaty na našej stránke alebo osobne.

Ak si s nejakou úlohou nebudete vedieť poradiť, no radi by ste i napriek tomu vedeli jej riešenie, pošlite nám riadne A4-ku s hlavičkou a namiesto riešenia nám na ňu napíšte, kde ste pri uvažovaní skončili (resp. sa vám ani nepodarilo odraziť sa. . .) a my vám na ten hárok papiera ochotne naznačíme riešenie. Nech si matematici naďalej pomáhajú!

Bodovanie úloh závisí od kvality riešenia, za každú úlohu môže riešiteľ získať najviac 5 bodov.

Prvákom sa do poradia započítava päť najlepšie vyriešených úloh + počet bodov za najlepšie vyriešenú úlohu.

Druhák sa do poradia započítava šesť najlepšie vyriešených úloh.

Tretiak sa do poradia započítava päť najlepšie vyriešených úloh spomedzi úloh 1 až 6 + počet bodov za lepšie vyriešenú úlohu z úloh 7 a 8.

Štvrták sa do poradia započítavajú štyri najlepšie vyriešené úlohy spomedzi úloh 1 až 6 + úlohy 7 a 8.

Pre študentov bilingválnych a osemročných gymnázií platia podmienky pre riešenie úloh podľa toho, koľko rokov im zostáva do maturity.

Prémia sa udeľuje podľa školy na konci semestra. Do úvahy sa berie súčet bodov všetkých žiakov danej školy v príslušnom semestri — ak je ten medzi 1 a 50, každý z nich dostane prémie 5 bodov, medzi 51 a 100 sú to 4 body, atď., medzi 201 a 250 je to 1 bod, nad 250 je to 0 bodov.

Varovania (!!!). Body sa samozrejme bez výnimky strhávajú za odpisovanie, za poslanie riešení po termíne a za osobné doručenie riešení. Pri odpisovaní rozlišujeme podobné riešenia (počet bodov delíme počtom zúčastnených a zaokrúhlime nadol) a „takmer kópie“, ktoré ostávajú bez bodu. Ak (náhodou) nájdete úlohu riešenú v literatúre, uveďte názov, autora a stranu, inak riskujete stratu bodov za odpisovanie (je však potrebné napísať aj samotné riešenie). V prípade, že nie ste spokojní s bodovým ohodnotením vášho riešenia, môžete nám do dvoch týždňov od rozoslania riešenia zaslať poštou sťažnosť a tá bude prešetraná.

Hlasovanie úloh závisí od zaujímavosti a jedinečnosti vášho riešenia. Radosť vám môže spraviť 1 hlas (prehľadné, jasné riešenie), alebo 2 či 3 hlasy za výnimočné a originálne nápady. Ak nájdete riešenie v literatúre, kladné hlasy si nepočítate. Naopak, hrôzu budiace riešenia (výzorom, zložitou) získajú –1 hlas. Horšie obídu tí, ktorým za odpisovanie strhneme body. Po ich vydedení počtom odpisujúcich dostanú –3 hlasy, po veľkom odpisovaní je to –5 hlasov. Tak hor sa do hľadania pekných riešení, zabudnite na odpisovanie a hrajme sa s matematikou! Riešitelia s najvyšším počtom hlasov budú na konci semestra odmenení.

Sústredenie je pre 32 účastníkov. Je odmenou pre najlepších, príležitosťou naučiť sa niečo nové a stretnúť sa s ostatnými riešiteľmi. Zúčastnia sa ho podľa záverečného poradia prví desiaty riešitelia, ďalších 10 najlepších riešiteľov, ktorých škola je v Košickom alebo Prešovskom kraji a členovia troch najlepších družstiev z Košického (Prešovského) matboja, ktorý sa koná v príslušnom polroku. Prípadní ďalší účastníci a náhradníci sú pozývaní podľa poradia STROMu; nie však tí riešitelia, ktorí už majú maturitu za sebou. Na sústredenie však nebudú vôbec pozvaní riešitelia, ktorí získali v príslušnom semestri –2 alebo menej hlasov.

ZADANIA ÚLOH LETNÉHO SEMESTRA 30. ROČNÍKA

3

Tretia séria

Úlohy pripravili: vedúci STROMu

Termín odoslania riešení: **27. marec 2006**

1. Feri dal do skúmavky 1111 červených a 9999 bielych molekúl. Keď sa dostanú do kontaktu dve molekuly rovnakej farby, zreagujú a vznikne jedna biela molekula. Keď sa dostanú do kontaktu dve molekuly rôznych farieb, vznikne jedna červená molekula. Akú farbu bude mať posledná molekula v skúmavke?
2. Kenny má niekoľko obľúbených čísel. Patrí medzi ne napríklad číslo 55331113355. Kennyho obľúbené čísla majú niekoľko špeciálnych vlastností. Sú to palindromické čísla (teda čísla, ktoré sa čítajú odpredu aj odzadu rovnako), ktoré dávajú zvyšok 2 po delení 3-mi, zvyšok 3 po delení 4-mi a zvyšok 0 po delení 5-mi. Nájdite najmenšie Kennyho obľúbené číslo a ukážte, že takýchto čísel je nekonečne veľa.
3. Zuzka mala v zošite narysovaný krásny trojuholník ABC . Vyliala si ale na zošit čaj a z krásneho trojuholníka ABC jej ostal len stred opísanej kružnice, priesečník osi uhla $\sphericalangle ACB$ a osi strany AB a priamka p , o ktorej vieme, že na nej ležali body B a C . Pomôžte Zuzke opäť zostrojiť jej milovaný trojuholník ABC .
4. Kuiso sa nudil a vypisoval si niektoré prirodzené čísla: 14, 144, 1444, 14444, ... Všimol si, že 144 aj 1444 sú druhými mocninami celého čísla. Koľko takých čísel ešte nájde?
5. Dávid sa nudil ešte viac ako Kuiso, a tak sa hral s kružidlom. Narysoval spolu 5 kružníc s rovnakým polomerom tak, že každé dve kružnice sa pretínajú (majú dva spoločné body). Koľko najviac priesečníkov môže byť na obrázku? Je možné nakresliť 5 kružníc s rovnakým polomerom v rovine tak, že každé dve kružnice sa pretínajú v dvoch bodoch a počet priesečníkov je nepárne číslo?
6. Na výlete STROMu sa Robko chystá dať každému účastníkovi jedno prirodzené číslo n . Je možné, aby každý účastník našiel nejakú päťicu celých čísel (a, b, c, d, e) , pre ktoré platí

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = n,$$

bez ohľadu na to, aké zákerné prirodzené číslo mu Robko prideli?

7. Katka si nakreslila rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC tak, aby $|\sphericalangle ABC| = 80^\circ$. Na stranách AB a AC si postupne dokreslila body D a E tak, aby $|\sphericalangle BCD| = 50^\circ$, $|\sphericalangle CBE| = 60^\circ$. Aký uhol zvierajú priamky DE a BC ?
8. Na istej planéte Gabriela žijú prirodzené čísla. Majú medzi sebou vytvorenú prísnu hierarchiu. Každé číslo má svojho nadriadeného, ktorého vieme vypočítať tak, že k danému číslu pripočítame jeho ciferný súčet. Napríklad $38 + 3 + 8 = 49$, takže nadriadené čísla 38 je číslo 49. Hovoríme tiež, že číslo 38 je podriadené číslu 49. Sú čísla, ktoré nemajú žiadnych podriadených (napríklad 20) a sú čísla, ktoré majú viac podriadených (napríklad číslo 101 má dvoch podriadených: 100 a 91). Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktoré má troch podriadených. (Nevzdávajte to!)

4

Štvrtá séria

Úlohy pripravili: vedúci STROMu

Termín odoslania riešení: **24. apríl 2006**

1. Ferimu sa splnil tajný sen a kúpil si les. Na 4-hektárovom lesnom pozemku štvorcového tvaru rastie spolu 2006 stromov. Ukážte, že existujú tri Feriho stromy, ktoré vytvárajú trojuholník s obsahom menším ako 20 m^2 .
2. Dávid dostal do daru trojuholník so stranami a, b, c . Aby tento trojuholník nebol sám, Dávid skonštruoval trojuholník so stranami $s-a, s-b, s-c$ (kde $s = \frac{a+b+c}{2}$). Akosi sa mu to zapáčilo, a tak tento postup opakoval znova a znova, kým to bolo možné. Pre ktoré pôvodné trojuholníky môže byť tento proces vykonávaný donekonečna?
3. Zuzka dostala do daru amazonského papagája, ktorý vie rozprávať. Síce len čísla, ale predsa. Ak sa mu Zuzka prihovori nejakým prirodzeným číslom, papagáj odpovie tak, že zakričí nejaké nezáporné číslo. Zuzka po pár dňoch zistia, že papagáj si čísla nevymýšľa len tak, z brucha, ale že dodržiava isté pravidlá:
 - i) ak posledná číslica Zuzkinho čísla je 3, tak papagáj zakričí: „Nula!!!“,
 - ii) ak Zuzka skúsi číslo 10, papagáj odpovie: „Jeden!“,
 - iii) ak Zuzka povie číslo 2000, papagáj na ňu zúrkne: „Trrrrri!“,

iv) na súčin dvoch čísel papagáj odpovie číslom, ktoré sa rovná súčtu odpovedí na jednotlivé činitele.

Zistite, akými číslami papagáj odpovie, ak Zuzka povie čísla 2006 a 2007.

4. Katka dostala od svojej učiteľky zaujímavú úlohu. Mala dokázať, že ak vezmeme ľubovoľné prirodzené čísla m, n také, že $n \leq m$, budú platiť tieto nerovnosti:

$$2^n \cdot n! \leq \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \leq (m^2+m)^n.$$

Pomôžte Katke dokázať, že je to naozaj tak!

5. Kuiso si raz na matematike narysoval tupouhlý rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB a tupým uhlom γ . Potom zostrojil jeho vpísanú a opísanú kružnicu a všimol si zaujímavú vec. Vzdialenosť ich stredov od strany AB bola rovnaká! (To bolo radosti!) Zistite veľkosti uhlov Kuisovho trojuholníka. Kuisov svet sa ale takmer zrútil, keď o týždeň prišiel Kenny a povedal, že tento trojuholník vôbec nie je jedinečný a existujú aj iné tupouhlé trojuholníky, ktoré majú túto vlastnosť. Mal Kenny pravdu? Zistite, pre ktoré hodnoty uhla γ existuje tupouhlý (nie nutne rovnoramenný) trojuholník ABC s tupým uhlom veľkosti γ oproti strane AB , v ktorom sú stredy vpísanej a opísanej kružnice rovnako vzdialené od najdlhšej strany AB trojuholníka ABC .

6. Gabka sa prehrabovala v knihách vo svojej knižnici a objavila úlohu ktorá ju upútala. No ani po dlhom premýšľaní a rátaní si nebola úplne istá či ju vyrátala dobre a tak zašla za Robkom a vraví: „Neviem si poradiť s touto úlohou.“ Nájdite všetky trojice prirodzených čísel (a, b, c) , pre ktoré platí

$$ab + c = (a^2, b^2) + (a, bc) + (b, ac) + (c, ab) = 239^2,$$

pričom (m, n) označuje najväčšieho spoločného deliteľa čísel m a n . Spolu to zvládli za krátku chvíľku. Podarí sa to aj Vám?

7. Na sústreďení STROMu si niektorí účastníci a vedúci vo voľnom čase usporiadali turnaj v piškvorkách. Zúčastnilo sa ho dvakrát viac chlapcov ako dievčat. Po tom, ako odohral každý s každým jeden zápas (ktorý skončil víťazstvom jedného z hráčov), sa zistili prekvapivé skutočnosti: Turnaj nemal víťaza, pretože všetci chlapci vyhrali rovnako veľa zápasov. Takisto turnaj nemal ani porazeného (porazenú?), pretože všetky dievčatá vyhrali rovnako veľa zápasov, presnejšie o tri menej ako ktorýkoľvek chlapec. Navyše, počet zápasov, v ktorých niektorý chlapec zvíťazil nad nejakým dievčaťom, sa rovnal počtu všetkých zápasov, v ktorých vyhralo dievča. Koľko hráčov sa zúčastnilo turnaja?

8. Tomáš si narysoval trojuholník ABC , v ktorom je $|\sphericalangle BAC| = 40^\circ$ a $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$. V ňom ešte dokreslil niekoľko bodov: bod D leží na strane AC tak, že $|\sphericalangle CBD| = 40^\circ$; bod E leží na strane AB tak, že $|\sphericalangle BCE| = 70^\circ$. Priesečník priamok BD a CE Tomáš označil ako F . Na obrázok sa pozrel z nadhľadu a usúdil, že priamka AF by mohla byť kolmá na priamku BC . Skúsil uhol týchto dvoch priamok odmerať uhlomerom a dostal $89,5^\circ$. Je to len nepresnosť rysovania? Sú priamky AF a BC na seba naozaj kolmé? (Svoje rozhodnutie dobre zdôvodnite!)

ZA PODPORU A SPOLUPRÁCU ĎAKUJEME

- Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta Univerzity P. J. Šafárika, Košice
- Jednota slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice

Názov:	STROM — korešpondenčný matematický seminár Číslo 4 • Marec 2006 • Letný semester 30. ročníka (2005/2006)
Internet:	http://seminar.strom.sk
E-mail:	strom@strom.sk
Vydáva:	Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet:	http://zdruzenie.strom.sk
E-mail:	zdruzenie@strom.sk