Korešpondenčný Matematický Seminár

MATIK

Číslo 5 – Ročník 37 matik.strom.sk

Ahoj!

Tvojmu pohľadu zjavne neuniklo ďalšie vydanie *MATIK*a, v ktorom nájdeš nielen poradie po prvej sérii tohto semestra, ale aj naše vzorové riešenia. Nezabúdaj však, že sme ešte len v polčase, tak určite nepoľavuj a pusti sa do druhej série. S radosťou očakávame Tvoje ďalšie riešenia!

vedúci *MATIK*a

Ako bude

Minisústredenia na školách

Niektoré zážitkové a vzdelávacie aktivity, ktoré robíme, by sme radi priblížili aj skupine žiakov, ktorí neriešia naše semináre v podobe krátkeho matematického sústredenia priamo v škole. V spolupráci so školami organizujeme jednodňové a dvojdňové matematické „minisústredenia“ pre 30 až 60 žiakov 5. – 9. ročníka (vždy rozsah najviac 4 ročníkov). Sústredenia prebiehajú priamo v priestoroch školy. Viac sa dozviete na `https://matik.strom.sk/sk/aktivity/minisustredenia/`.

Tábor mladých matematikov

Drahý riešiteľ, ak premýšľaš, čo s časom počas letných prázdnin, máme pre teba dobré správy! Už vieme, kedy a kde sa bude konať TMM, teda Tábor mladých matematikov! V kalendári si rezervuj 29. júla až 5. augusta 2024, pretože práve vtedy sa ocitneme v Rekreačnom stredisku Zelený breh na najúžasnejšej akcii roka. Pozvánku s odkazom na prihlasovanie nájdeš na stránke.
Nevieš, čo je TMM? Tábor mladých matematikov je ako sústredenie, avšak je dlhšie, takže o toľko lepšie! Viac informácií a aj samotnú pozvánku a prihlasovanie nájdeš na `https://matik.strom.sk/tmm/`.

Máš Problém?!

Ďalší ročník populárnej online sútaže Máš problém?! sa tentokrát uskutoční v piatok 3. mája 2024. Súťaž je určená primárne pre žiakov 4. až 9. ročníka ZŠ a príslušných ročníkov OG, no zapojiť sa môžu i šikovní mladší žiaci.
Pre súťažiacich sme si už tradične pripravili sadu zaujímavých matematických problémov a úloh, na riešenie ktorých majú 60 minút. Ak sa plánujete registrovať, nezabudnite následne potvrdiť vašu registráciu v e-maili, ktorý vám bude zaslaný do vami uvedenej uvedenej stránky.
Viac informácií o samotnej súťaži ako aj registráciu nájdeš na
`https://masproblem.strom.sk/`.

Vzorové riešenia 1. série úloh letného semestra

1 opravovali: **Martin „Kopy“ Kopčány** a **Rišo Prikler**

najkrajšie riešenia: Magdaléna Škiabová, Marie Kalasová

48 riešení

Zadanie

Zvýraznené časti zadania boli upresnené 25.2.2024

Artemis a Boreas vymysleli hru s kladnými celými číslami od 1 do n. V hre sa striedajú v ťahoch, a to tak, že v každom ťahu si hráč **zoberie** jedno z ešte nevybratých čísel. Artemis, ktorá začína, vyhrá, ak bude mať na konci **pri sebe** dve čísla, ktorých súčin je $n+1$, inak vyhrá Boreas. Ktorý hráč má vyhrávajúcu stratégiu? (Vyhrávajúca stratégia je postup, podľa ktorého hráč vyhrá bez ohľadu na ťahy súpera.)

Riešenie

Dokážme si, že výhernú stratégiu bude mať Boreas. Ak si Artemis v niektorom zo svojich ťahov vyberie nejakého deliteľa čísla $n+1$ (označme si ho ako x), Boreas v nasledujúcom ťahu vyberie číslo $(n+1)/x$ a zabráni tomu, aby si toto číslo v nejakom neskoršom ťahu mohla vybrať Artemis, čím by dostala dvojicu čísel x a $(n+1)/x$, ktoré dávajú súčin $n+1$. Tak by vyhrala, čo Boreas nechce. Vyššie spomínanou stratégiou sa Boreovi podarí zabrániť Artemis, aby dokázala vytvoriť hocijakú dvojicu čísel, ktoré dávajú súčin $n+1$, preto Boreas vždy vyhrá.

2 opravovali: **Janka Urbánová** a **Matúš Masrna**

najkrajšie riešenia: Daniela Tkáčová, Alica Földesová

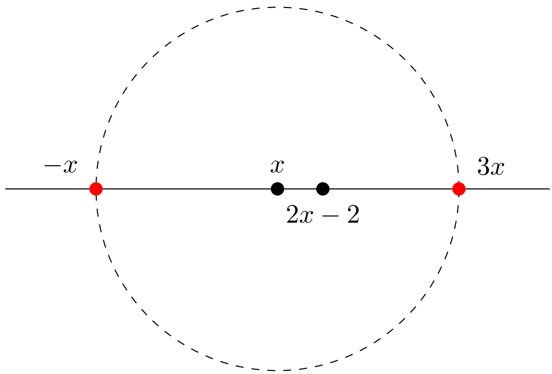
47 riešení

Zadanie

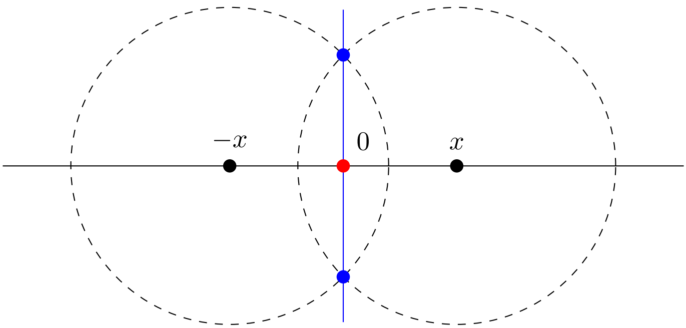
Aténa zoslala Pytagorovi úlohu: „Na číselnej osi sú zaznačené body x, $2x-2$ a $3x$ (viete, ktorý bod prislúcha ktorému číslu). Nájdi body 0 a 1.“ Ako to mohol Pytagoras spraviť, keď mohol použiť iba kružidlo a pravítko bez mierky?

Riešenie

S pravítkom bez mierky nevieme merať presné vzdialenosti. Avšak s pomocou kružidla môžeme „nabrať“ vzdialenosť medzi dvoma bodmi, ktorých vzájomnú polohu poznáme, a naniesť ju na iné miesto na číselnej osi. Napríklad, ak kružidlo zapichneme do bodu x a roztiahneme ho presne po bod $3x$, môžeme ním nakresliť v ľubovoľnom bode kružnicu s polomerom $|3x-x|=|2x|$ (absolútna hodnota je potrebná, keďže x môže byť záporné). Všimnime si, že ak takúto kružnicu nakreslíme v bode x, tak pretne číselnú os práve v dvoch bodoch: $x+2x=3x$ a $x-2x=-x$.



Keď poznáme polohu bodov x a $-x$, tak vieme určiť aj polohu bodu 0, keďže 0 musí ležať presne uprostred medzi x a $-x$. Stred úsečky určenej dvoma bodmi zostrojíme pomocou kružidla a pravítka bez mierky nasledovne: pomocou kružidla nameriame o niečo viac ako je (odhadovaná) polovica dĺžky úsečky. Kružidlo s touto dĺžkou zapichneme do prvého konca úsečky a opíšeme kružnicový oblúk. S tým istým polomerom opíšeme ďalší oblúk z druhého konca. Oblúky sa nám musia pretať v 2 bodoch. Následne s pomocou pravítka tieto body spojíme a nájdeme priesečník medzi ich spojnicou a danou úsečkou. Zo symetrie výsledného obrázka je zjavné, že tento priesečník musí byť stredom našej úsečky.



Jediný prípad, kedy tento postup hľadania 0 nemôžeme použiť, nastane, ak body x a $3x$ ležia na rovnakom mieste, teda kružnica z bodu x by bola zdegenerovaná s polomerom 0. V takom prípade však musí platiť $x = 3x$, z čoho vyplýva $x = 0$, takže bod 0 by bol jednoducho zhodný s bodom x.

Ostáva nám určiť polohu bodu 1. Podobne ako predtým, ak do kružidla naberieme vzdialenosť medzi bodmi x a $2x-2$, môžeme z bodu x nakresliť kružnicu s polomerom $|(2x-2)-x| = |x-2|$. Táto kružnica pretne číselnú os v bodoch $x+(x-2) = 2x-2$

a $x - (x - 2) = 2$. No a keď poznáme polohu bodov 0 a 2, vieme nájsť aj bod 1, ktorý musí ležať presne uprostred medzi nimi, využitím vyššie uvedeného spôsobu pre zostrojenie stredu úsečky. Opäť existuje práve jeden prípad, kedy tento postup nemôžeme použiť, a to ak sú body x a $2x - 2$ zhodné. Lenže potom musí platiť $x = 2x - 2$, z čoho vyplýva $x = 2$, takže bod 2 by bol jednoducho zhodný s x. Tým sme opísali celý postup, ako môže Pytagoras za daných podmienok nájsť body 0 a 1.

Komentár

Veľa riešení predpokladalo, že x bude kladné číslo, respektíve dokonca, že body x, $2x - 2$ a $3x$ budú na číselnej osi práve v tomto poradí a všetky napravo od nuly. Veľa z týchto postupov by sa našťastie však dalo zovšeobecniť aj na záporné čísla, avšak vyskytovali sa potom nepresné kroky ako napríklad „nájdeme bod 0 naľavo od bodu x". Preto sme veľa riešeniam museli dať 8 bodov namiesto plného počtu. Do budúcna bude vždy dobré pri kreslení prvotného náčrtu pri takýchto úlohách porozmýšľať nad tým, či načrtnuté body musia byť práve v takej vzájomnej polohe, alebo sú aj iné prípady.

3

opravovali: **Veve Vodičková**, **Oskar Cacara** a **Rišo Vodička** 51 riešení

najkrajšie riešenie: Michal Revický

Zadanie

Okolo Herkula stálo v kruhu 17 príšer, z ktorých každá mala iný počet hláv z rozmedzia od 1 do 17. Dokážte, že každé takéto usporiadanie musí mať najmenej jednu skupinu troch susedných príšer, ktoré majú spolu aspoň 27 hláv.

Riešenie

Riešme úlohu sporom a predpokladajme, že existuje také usporiadanie príšer, že v každej trojici susedných príšer je súčet hláv najviac 26.

Pozrime sa na všetky trojice susedných príšer. Keďže príšery stoja v kruhu, tak každá príšera je raz prvá v trojici, raz druhá a raz tretia, čiže každá príšera je v práve troch trojiciach. To znamená, že keď sčítame počty hláv v každej trojici, budeme tam mať každú príšeru započítanú trikrát, a teda dostaneme trikrát väčšie číslo, ako keby sme sčítali počty hláv všetkých príšer. Príšery majú počty hláv 1 až 17, čiže ich súčet je $1 + 2 + \cdots + 17 = 153$, a preto súčet počtov hláv vo všetkých trojiciach susedných príšer je $153 \cdot 3 = 459$. Z predpokladu ale vieme, že v každej trojici je súčet hláv najviac 26. Týchto trojíc je 17, keďže každá začína jednou zo 17 príšer, preto súčet všetkých trojíc je najviac $17 \cdot 26 = 442$. To je ale spor, keďže súčet všetkých trojíc má byť 459, čo je viac ako 442. Preto musí existovať trojica troch susedných príšer, ktoré majú spolu aspoň 27 hláv.

Komentár

Väčšina z vás, ktorí ste úlohu vyriešili podobným spôsobom, ako vzorové riešenie, ste získali plný počet bodov, čo nás samozrejme veľmi teší :). Niektorí z vás vyriešili úlohu cez priemerný počet hláv, čo je tiež cesta k dobrému riešeniu. Najčastejšou chybou bolo to, že ste sa síce dopracovali k správnemu priemeru, teda 27 hláv, ale ďalej ste nevysvetlili, čo to znamená. Znamená to to, že keby nejaká trojica mala menej ako 27 hláv, tak nejaká iná trojica by musela mať viac ako 27 hláv.
Niekoľko z vás sa snažilo úlohu vyriešiť tak, že ste rozoberali možné usporiadania počtu hláv v kruhu. Chybou bolo to, že nie všetci z vás rozobrali všetky možnosti. Takýmto riešeniam sme žiaľ nemohli dať plný počet bodov. Preto rada do budúcna: nezabudnite overiť všetky možnosti. :)

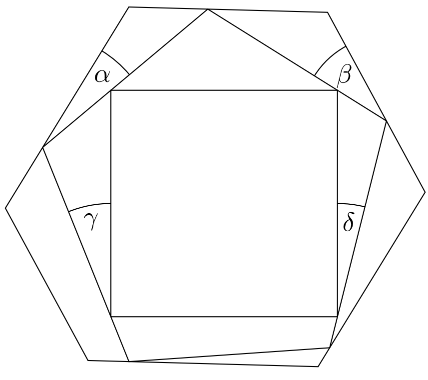
4

opravovali: **Eva Krajčiová** a **Jano Richnavský**
najkrajšie riešenie: Ondrej Medo

45 riešení

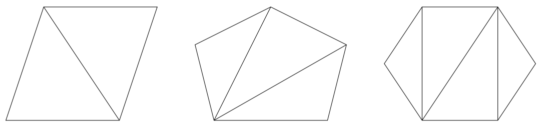
Zadanie

Zeus sa rád pozerá na Zem cez okno. Okno má tvar štvorca, ktorého vrcholy ležia na stranách päťuholníka tak ako na obrázku. Vrcholy päťuholníka zase ležia na stranách šesťuholníka tak ako na obrázku. Päťuholník má všetky vnútorné uhly rovnakej veľkosti a aj šesťuholník má všetky vnútorné uhly rovnakej veľkosti. Zistite súčet uhlov $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

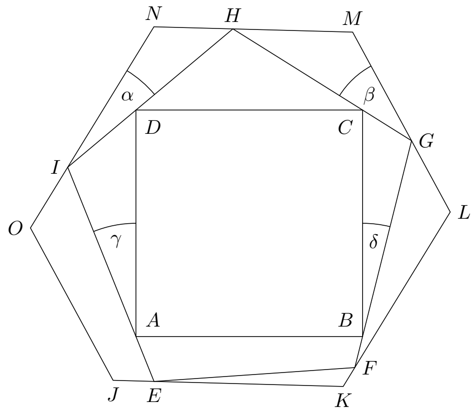


Riešenie

Každý n-uholník vieme rozdeliť na niekoľko trojuholníkov, a to vždy tak, že je tých trojuholníkov o 2 menej ako vrcholov. Každý trojuholník má súčet veľkostí vnútorných uhlov 180°, a keďže sa všetky vnútorné uhly mnohouholníka dokopy skladajú práve z vnútorných uhlov týchto trojuholníkov, ich súčet bude rovnaký ako súčet vnútorných uhlov všetkých trojuholníkov. Odtiaľ vieme odvodiť už známy vzorec pre súčet veľkostí vnútorných uhlov n-uholníka: $(n-2) \cdot 180°$.



Po využití takého výpočtu prichádzame na to, že súčet vnútorných uhlov je v 5-uholníku $(5-2)\cdot 180^\circ = 3\cdot 180^\circ = 540^\circ$, a keďže majú všetky uhly v našom zadaní rovnakú veľkosť, na jeden uhol pripadá $540^\circ : 5 = 108^\circ$. V 6-uholníku podobne prídeme na súčet vnútorných uhlov $(6-2)\cdot 180^\circ = 4\cdot 180^\circ = 720^\circ$, veľkosť jedného uhla je teda $720^\circ : 6 = 120^\circ$. Vnútorný uhol štvorca má veľkosť 90°.
Označme si teraz jednotlivé vrcholy:



Pozrime sa na trojuholník IHN. Uhol HNI je vnútorným uhlom šesťuholníka, preto je jeho veľkosť 120°. Súčet vnútorných uhlov trojuholníka je 180°, preto platí:

$$\begin{aligned} |\sphericalangle IHN| + |\sphericalangle HNI| + |\sphericalangle NIH| &= 180^\circ \\ |\sphericalangle IHN| + 120^\circ + \alpha &= 180^\circ \qquad / -120^\circ - \alpha \\ |\sphericalangle IHN| &= 60^\circ - \alpha \end{aligned}$$

Podobne z trojuholníka HGM vieme odvodiť $|\sphericalangle GHM| = 60^\circ - \beta$. Uhol NHM je priamy, spolu má teda veľkosť 180°. Uhol IHG je vnútorným uhlom 5-uholníka, má teda veľkosť 108°. Platí preto:

$$\begin{aligned} |\sphericalangle IHN| + |\sphericalangle IHG| + |\sphericalangle GHM| &= |\sphericalangle NHM| \\ (60^\circ - \alpha) + 108^\circ + (60^\circ - \beta) &= 180^\circ \\ 228^\circ - \alpha - \beta &= 180^\circ \qquad / -180^\circ + \alpha + \beta \\ 48^\circ &= \alpha + \beta \end{aligned}$$

Uhol IAE je tiež priamy, preto má veľkosť $180°$. Uhol DAB je vnútorným uhlom štvorca, preto je jeho veľkosť $90°$. Platí teda:

$$\begin{aligned}|\sphericalangle IAD| + |\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BAE| &= |\sphericalangle IAE| \\ \gamma + 90° + |\sphericalangle BAE| &= 180° \qquad / - 90° - \gamma \\ |\sphericalangle BAE| &= 90° - \gamma\end{aligned}$$

Rovnakým postupom vieme z priameho uhla FBG odvodiť $|\sphericalangle FBA| = 90° - \delta$. Pozrime sa teraz na štvoruholník $EFBA$. Súčet veľkostí jeho vnútorných uhlov je $360°$. Uhly AEF a EFB sú vnútornými uhlami 5-uholníka, preto je ich veľkosť $108°$. Platí preto:

$$\begin{aligned}|\sphericalangle AEF| + |\sphericalangle EFB| + |\sphericalangle FBA| + |\sphericalangle BAE| &= 360° \\ 108° + 108° + (90° - \delta) + (90° - \gamma) &= 360° \\ 396° - \gamma - \delta &= 360° \qquad / - 360° + \gamma + \delta \\ 36° &= \gamma + \delta\end{aligned}$$

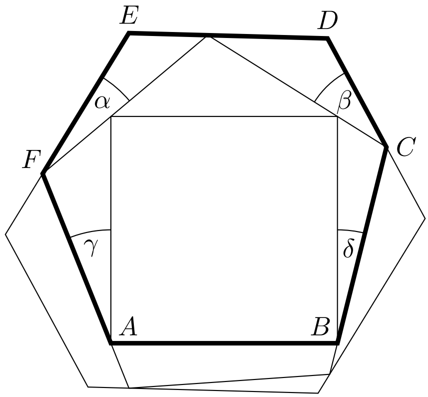
Teraz už len stačí hodnoty sčítať a dostávame sa k požadovanému výsledku:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma + \delta &= \\ (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) &= \\ 48° + 36° &= 84°\end{aligned}$$

Iné riešenie

Podobne ako v predchádzajúcom riešení sa dopracujeme k veľkostiam vnútorných uhlov mnohouholníkov.
Pozrime sa na vyznačený šesťuholník $ABCDEF$. Vieme, že súčet jeho vnútorných uhlov je $720°$, z čoho sa dopracujeme k výsledku:

$$\begin{aligned}|\sphericalangle FAB| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCD| + |\sphericalangle CDE| + |\sphericalangle DEF| + |\sphericalangle EFA| &= 720° \\ (\gamma + 90°) + (90° + \delta) + (108° + \beta) + 120° + 120° + (\alpha + 108°) &= 720° \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta + 636° &= 720° \qquad / - 636° \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta &= 84°\end{aligned}$$



Komentár

Najčastejšou chybou, ktorá sa vo vašich riešeniach vyskytla, bolo to, že veľkosti uhlov päťuholníka a šesťuholníka ste určili na základe mylného predpokladu, že mnohouholníky musia byť pravidelné. V zadaní je uvedené, že „majú všetky vnútorné uhly rovnakej veľkosti“, z toho ale nevyplýva, že sú pravidelné (nemusia mať strany rovnakých veľkostí, dobrým príkladom je napr. štvorec a obdĺžnik - štvorec je pravidelný štvoruholník, má všetky vnútorné uhly rovnaké a aj strany má rovnaké, zatiaľ čo obdĺžnik zjavne nemá všetky strany rovnaké, no stále má všetky vnútorné uhly rovnakej veľkosti). Pravidelné mnohouholníky majú rovnaké veľkosti vnútorných uhlov ako mnohouholníky v zadaní, teda výsledné veľkosti uhlov vyplývajúce z tohto zavádzajúceho úsudku boli nakoniec správne. Preto riešitelia, ktorí takto uvažovali, nemali problém pokračovať v riešení úlohy správne bez ďalších omylov, nemohli však byť ohodnotení plným počtom bodov.

Zriedkavo sa naskytla aj druhá chyba, a to tá, že ste považovali niektoré zo strán či už štvorca, päťuholníka alebo šesťuholníka za navzájom rovnobežné. Toto zo zadania takisto nevyplývalo, teda riešili ste len špeciálny prípad úlohy. Aj týmto spôsobom ste sa dostali k správnemu výsledku, avšak nezdôvodnili ste, že tento výsledok platí aj pre ľubovoľnú inú konšteláciu mnohouholníkov.

5 opravovali: **Martin „Iskra“ Dudjak** a **Matúš Libák**

najkrajšie riešenie: Alenka Chladná

41 riešení

Zadanie

Počty bohov jednotlivých elementov sú postupne rôzne prvočísla l, m, n, t také, že $2 \cdot l + 3 \cdot m + 5 \cdot n + 7 \cdot t = 162$ a zároveň $11 \cdot l + 7 \cdot m + 5 \cdot n + 4 \cdot t = 162$. Nájdite všetky možné hodnoty pre l, m, n, t. (Prvočíslo je číslo, ktoré má práve dvoch deliteľov - číslo 1 a seba samé.)

Riešenie

Obe rovnice majú hodnotu 162, preto ich môžeme dať do rovnosti:

$$2 \cdot l + 3 \cdot m + 5 \cdot n + 7 \cdot t = 11 \cdot l + 7 \cdot m + 5 \cdot n + 4 \cdot t.$$

Od oboch strán odrátame $2 \cdot l$, $3 \cdot m$ a $5 \cdot n$:

$$3 \cdot t = 9 \cdot l + 4 \cdot m.$$

$3 \cdot t$ aj $9 \cdot l$ sú určite deliteľné tromi, keďže t aj l sú kladné celé čísla. Aby platila rovnosť, musí byť teda aj $4 \cdot m$ deliteľné tromi. Keďže je m kladné celé číslo, bude to práve vtedy, keď m bude deliteľné tromi. Jediné prvočíslo spĺňajúce túto podmienku je 3, preto $m = 3$. Toto dosadíme do našej rovnice:

$$3 \cdot t = 9 \cdot l + 4 \cdot 3.$$

Obe strany rovnice vydelíme tromi:

$$t = 3 \cdot l + 4.$$

Túto hodnotu t, rovnako ako $m = 3$, dosadíme napríklad do prvej rovnice:

$$2 \cdot l + 3 \cdot m + 5 \cdot n + 7 \cdot t = 162$$
$$2 \cdot l + 3 \cdot 3 + 5 \cdot n + 7 \cdot (3 \cdot l + 4) = 162.$$

Ľavú stranu vieme roznásobiť a od oboch strán odrátať číslo 37:

$$2 \cdot l + 9 + 5 \cdot n + 21 \cdot l + 28 = 162$$
$$23 \cdot l + 5 \cdot n + 37 = 162$$
$$23 \cdot l + 5 \cdot n = 125.$$

$5 \cdot n$ aj 125 sú určite deliteľné piatimi. Aby platila rovnosť, musí byť teda aj $23 \cdot l$ deliteľný piatimi. Podobne ako pri m to bude práve vtedy, keď l bude deliteľné piatimi. Jediné prvočíslo spĺňajúce túto podmienku je 5, preto $l = 5$. Toto dosadíme do našej rovnice:

$$23 \cdot 5 + 5 \cdot n = 125.$$

Vyčíslime, od oboch strán odrátame 115, obe strany predelíme číslom 5 a získame hodnotu n:

$$\begin{aligned} 115 + 5 \cdot n &= 125 \\ 5 \cdot n &= 10 \\ n &= 2 \end{aligned}$$

Napokon hodnotu $l = 5$ dosadíme do našej rovnice zo začiatku riešenia a dopočítame hodnotu t:

$$\begin{aligned} t &= 3 \cdot l + 4 \\ t &= 3 \cdot 5 + 4 \\ t &= 15 + 4 \\ t &= 19 \end{aligned}$$

Postupovali sme jednoznačne, nikde sme nemali na výber z viacerých možností, preto jediné možné hodnoty pre l, m, n, t sú postupne $5, 3, 2, 19$.

Komentár

Úloha sa dala riešiť úpravou rovníc. Niektorí ju riešili prechádzaním možností. Takýto prístup môže fungovať, ale musíme sa uistiť, že prejdeme naozaj všetky možnosti. Veľakrát sa však stalo, že po nájdení výsledku ste prestali predchádzať možnosti a prehlásili ste, že ste našli výsledok. V takýchto úlohách je potrebné odôvodniť, prečo je jediný.

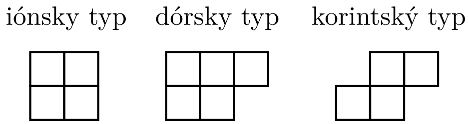
6 opravovali: **Paťo Paľovčík** a **Taly Poliačiková**

najkrajšie riešenie: Alenka Chladná a Rišo Semanišin

45 riešení

Zadanie

Dar bohom mal tvar mozaiky s rozmermi 20×47. Mozaika sa skladala z ľubovoľne otočených alebo prevrátených dielikov iónskeho, dórskeho a korintského typu nasledujúcich tvarov:

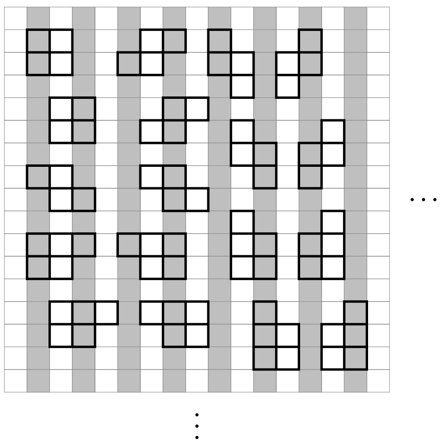


Koľko najmenej dielikov dórskeho typu bolo v mozaike použitých?

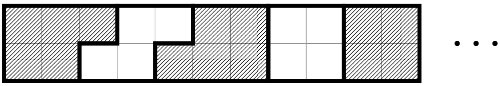
Riešenie

Naše riešenie sa bude skladať z dvoch častí - tou prvou je zistenie, koľko najmenej dielikov dórskeho typu použiť musíme, a tou druhou je overenie, že s takým počtom naozaj mozaiku vyplniť vieme.

Máme mozaiku s 20 riadkami a 47 stĺpcami. Ofarbime každý druhý stĺpec sivou farbou - takto dostaneme striedavo 24 bielych a 23 sivých stĺpcov. Všimnime si, že nech umiestnime dielik iónskeho typu kamkoľvek do mozaiky, vždy pokryje 2 biele a 2 sivé políčka. Veľmi podobne sa správa aj dielik korintského typu - nech ho umiestnime kamkoľvek a akokoľvek otočený, vždy pokryje práve 2 políčka bielej farby a 2 políčka sivej farby. Dórsky typ sa skladá z 5 dielikov - nech ho umiestnime kamkoľvek, vždy bude mať z jednej farby 3 a z druhej 2 políčka.



Keďže je v jednom stĺpci 20 políčok a máme o jeden biely stĺpec viac, znamená to, že bielych políčok je o 20 viac ako sivých. Keďže potrebujeme pokryť všetky políčka a iónsky s korintským typom vždy pokryjú rovnaký počet bielych a sivých, musíme rozdiel v počtoch jednotlivých farieb vyriešiť práve dórskym typom. Keďže dielik dórskeho typu pokryje z jednej farby o políčko viac, musí ich byť aspoň 20 takých, ktoré pokrývajú 3 biele a 2 sivé políčka, na to, aby sme vyrovnali počty bielych a sivých políčok v celej mozaike.
Teraz ostáva zistiť, či mozaiku vieme nejakým spôsobom s týmto počtom vyplniť. Rozdeľme si teraz celú mozaiku na 10 obdĺžnikov o výške 2 a šírke 47. Možností na vyplnenie takých obdĺžnikov je mnoho, my si ukážeme len jedno z nich - také, kde využijeme všetky tri typy. Vezmime jeden dielik dórskeho typu, jeden korintského a jeden otočený dielik dórskeho typu - keď ich takto poukladáme vedľa seba, pokryjeme 7 stĺpcov z celého obdĺžnika 2×47. Zvyšných 40 stĺpcov už veľmi jednoducho vyplníme 20timi dielikmi iónskeho typu.



Takýmto spôsobom vyplníme všetkých 10 obdĺžnikov 2×47, čiže celú mozaiku. V každom z desiatich obdĺžnikov sme použili práve 2 dieliky dórskeho typu, a teda ukázali sme, že ich 20 dokopy naozaj stačí, čo znamená, že je naše riešenie hotové.

Komentár

Vzorové riešenie bolo pomerne nápadité a podobným štýlom to riešili len dvaja z vás. Niektorí sa snažili pozerať na rôzne umiestnenia rôznych typov dielikov na mozaike, avšak väčšina rozdelila mozaiku jednoducho po riadkoch a na iné spôsoby uloženia sa nepozerala. K správnemu výsledku vrátane vyhovujúceho rozloženia dielikov ste došli skoro všetci, ale v takomto type úlohy sa nestačí pozerať na to, ako to funguje pre jeden spôsob rozloženia.

Zadania 2. série úloh letného semestra

Riešenia pošlite najneskôr do **8. apríla 2024**

Úloha 1

Héfaistos ukul meč s hrotom v tvare rovnostranného trojuholníka ABC. Niekam na jeho stranu BC vypálil bod D. Obsah trojuholníka ABD je trikrát väčší ako obsah trojuholníka ACD. Rozdiel ich obvodov je $5\,\mathrm{cm}$. Určte veľkosť strany AB.

Úloha 2

Iris priradila siedmim farbám dúhy cifry 1 až 9, každú najviac raz. Prvej farbe, červenej, priradila cifru 1. Všimla si, že súčiny cifier prvých troch farieb, prostredných troch farieb a posledných troch farieb sa rovnajú. Zároveň si všimla, že sedemciferné číslo, ktoré očíslovanie dúhy vytvorilo, je deliteľné jedným z cifier, ktoré nepoužila. Aké cifry priradila Iris jednotlivým farbám dúhy?

Úloha 3

Zvýraznená časť zadania sa zmenila 28.1.2024

Afrodita napísala na pergamen niekoľko po sebe idúcich kladných celých čísel. Ares roztrhol pergamen na dve časti tak, že:

- *na každej z nich je napísaných niekoľko **(aspoň jedno)** po sebe idúcich kladných celých čísel,*
- *na jednej časti je o jedno číslo viac ako na druhej,*
- *súčty čísel na oboch častiach sa rovnajú.*

Dokážte, že najmenšie z čísel, ktoré Afrodita napísala, je druhou mocninou kladného celého čísla (tzn. vieme ho napísať ako súčin kladného celého čísla so samým sebou).

Úloha 4

Héra dookola vypĺňala tabuľku 5×4 tak, že v každej 2×2 podtabuľke sa nachádzalo každé z jej štyroch obľúbených čísel. Takto dostala niekoľko rôznych vyplnení celej tabuľky 5×4. Poseidon si po každom vyplnení zapísal súčet všetkých čísel vo vyplnenej tabuľke. Koľko najviac rôznych súčtov mohol mať Poseidon zapísaných?

Úloha 5

Nebeská záhrada má tvar štvoruholníka $ABCD$, v ktorom platí, že uhol ACB má $90°$, uhol BAC má $35°$ a body B a D sú symetrické (osovo súmerné) podľa priamky prechádzajúcej stredom strany AB a bodom C. Aký veľký je uhol ADC?

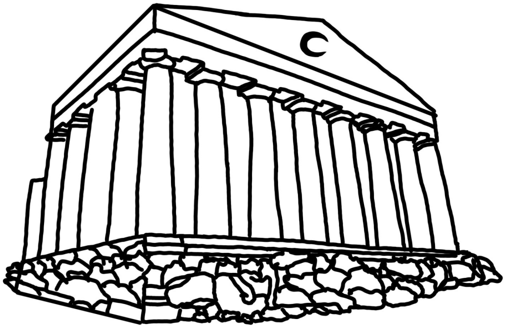
Úloha 6

V trónnej sále na Olympe bolo 10 bohov. Každý z nich mal od 1 do 100 rokov (vek rátame na celé roky). Dokážte, že spomedzi týchto bohov môžeme vybrať dve neprázdne rovnako staré skupiny (nikto nebude v oboch). Vek skupiny je súčtom vekov jej členov.

Poradie po 1. sérii letného semestra

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1. - 5.	Richard Semanišin	Z7	GAlejKE	9	9	9	9	9	9	54
	Hana Erdélyiová	Z8	GAMČABA	9	9	9	9	9	-	54
	Alena Chladná	Z8	GAMČABA	9	9	9	9	9	9	54
	Richard Futáš	Z7	ZPAngKE	9	9	9	9	9	6	54
	Alica Földesová	Z7	VSCharlott	9	9	9	9	9	-	54
6.	Dominik Feňovčík	Z8	ZBeleKE	9	9	9	8	9	-	53
7. - 8.	Magdaléna Škriabová	Z9	ZKro4KE	9	9	9	8	9	8	52
	Filip Feher	Z7	ZPAngKE	9	9	7	9	9	4	52
9. - 10.	Šimon Jonaštík	Z7	GAMČABA	9	9	7	8	9	-	51
	Tomáš Cabúk	Z8	ZHlaGL	9	8	9	8	9	7	51
11. - 12.	Hana Ihnátová	Z8	ZObcSeč	9	8	9	9	7	4	50
	Marek Babuščák	Z7	GAlejKE	5	9	9	9	9	0	50
13. - 16.	Vojto Bálint	Z8	CZRZaZA	7	9	8	8	9	5	49
	Sara Vojtkova	Z9	ZPoliKE	9	8	9	9	9	5	49
	Adam Horváth	Z7	GAlejKE	9	9	9	8	?	5	49
	Lívia Lukáčová	Z9	ZPoliKE	9	8	9	9	9	5	49
17. - 19.	Ondrej Medo	Z7	OS Wünnewil	9	9	9	9	-	3	48
	Daniel Ryan Takáč	Z9	GAlejKE	9	9	7	9	9	5	48
	Jakub Katrák	Z8	ZPoliKE	9	8	4	9	9	5	48
20. - 24.	Nina Hudáková	Z9	GAlejKE	9	9	8	8	9	4	47
	Sandra Futášová	Z7	ZPAngKE	8	9	9	4	8	2	47
	Jakub Jančiga	Z7	ZGoraZA	9	8	9	8	-	4	47
	Sophia Sotáková	Z9	ZŠverHE	8	9	9	9	7	5	47
	Tomáš Urmanič	Z7	GAMČABA	9	9	5	9	6	4	47
25. - 27.	Daniela Tkáčová	Z8	ZLevoSN	9	9	9	5	7	5	46
	Emilián Frischer	Z7	GAlejKE	9	9	5	5	9	3	46
	Lukáš Húdek	Z9	GAlejKE	9	9	7	9	6	6	46
28.	Lukáš Kostík	Z9	GAlejKE	9	8	7	9	9	3	45
29.	Lukáš Paška	Z9	ZKe30KE	9	8	7	9	5	6	44
30.	Lýdia Mikušáková	Z7	GAlejKE	8	8	9	5	5	4	43
31.	Kristofer Noel Rjabinčák	Z7	ZKro4KE	9	9	-	4	6	5	42
32.	Jakub Tomasz	Z7	ZKro4KE	9	4	7	-	9	3	41
33. - 34.	Elena Kundríková	Z7	ZKro4KE	-	7	8	8	9	-	40
	Michal Hudák	Z7	GAlejKE	9	9	4	9	-	-	40
35. - 36.	Marek Mičko	Z7	ZKro4KE	-	9	3	9	5	4	39
	Eva Hricová	Z9	GAlejKE	7	9	7	9	7	-	39
37.	Michal Revický	Z8	GJARMPO	1	9	9	9	4	2	37
38. - 39.	Patrik Murín	Z7	ZKro4KE	?	8	7	-	9	4	36
	Kristina Jančigová	Z9	BGMHSuč	8	9	7	8	?	4	36
40. - 41.	Šimon Mihalik	Z9	GsvTAKE	9	9	7	9	-	-	34
	Ján Meteňko	Z9	ZŠ Lúčna	9	?	8	9	7	1	34
42.	Marie Kasalová	Z9	GTruhla	9	9	6	9	-	-	33
43. - 44.	Viliam Vrchovinsky	Z7	ZKro4KE	6	9	-	-	5	-	26
	Simona Stahovcová	Z7	ZPAngKE	5	3	0	3	5	5	26
45.	Kareem Tereska	Z8	ZKomeMI	9	-	9	-	5	-	23
46.	Barbora Brindžáková	Z9	GPMláKE	9	-	9	-	-	-	18
47.	Jakub Porubsky	Z7	ZPAngKE	-	8	-	-	-	3	14
48. - 49.	Daniela Štulajterová	Z8	ZKro4KE	-	9	-	4	-	-	13
	Samuel Švec	Z8	ZKro4KE	-	3	7	3	-	0	13

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
50.	Oliver Kruták	Z7	GAlejKE	4	-	-	-	-	4	12
51.	Olívia Kovaľová	Z8	ZJuhVnT	0	-	3	-	5	2	10
52.	Miriam Varechová	Z9	ZKro4KE	-	-	-	9	-	-	9
53.	Veronika Štiavnická	Z7	ZKro4KE	-	8	-	-	-	0	8
54. - 55.	Damián Fedor	Z8	ZJuhVnT	-	-	-	-	-	7	7
	Veronika Vavreková	Z8	ZKro4KE	-	-	2	3	-	2	7
56.	Lukáš Kmec	Z8	ZKro4KE	-	-	3	-	-	2	5
57. - 59.	Adela Polomská	Z8	ZKro4KE	-	-	1	-	-	3	4
	Matúš Katina	Z8	ZKro4KE	-	-	1	-	-	3	4
	Leo Torma	Z8	ZKro4KE	1	-	3	-	-	-	4
60.	Slavomira Synott	Z8	ZKro4KE	-	-	1	-	-	0	1
61.	Max Hložek	Z8	ZKro4KE	-	?	?	-	-	-	0



Názov: *MATIK* – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 5 • Apríl 2024 • Letný semester 37. ročníka

Web: `matik.strom.sk`

E-mail: `matik@strom.sk`

Riešenia: Prijímame odovzdaním na webe, poštou a len v prípade poruchy na adrese `riesenia@strom.sk`

Organizátor: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach,
Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice
Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.