

KOREŠPONDENČNÝ MATEMATICKÝ SEMINÁR

# MATIK

ČÍSLO 1 – ROČNÍK 30 — <https://matik.strom.sk>



## Ahojte!

Krásny čas prázdnin sa už skončil a my sa zase raz vraciame do školských lavíc. Škola predsa nie je taká zlá, hlavne keď s ňou prichádza aj ďalšie číslo nášho obľúbeného *MATIK*a. Tento časopis nie je len tak hocikaký – zaujímavým príbehom si môžeme spríjemniť čas v škole aj doma a taktiež si precvičiť naše vedomosti pri riešení nie len zložitejších úloh. S oslavou našich krásnych 30. narodenín (všetko najlepšie *MATIK*u) sme si pre vás pripravili aj novinku v podobe edukačného okienka. Okrem toho naše narodeniny oslávime aj tradičnými aktivitami, o ktorých sa viac dočítate nižšie. A ako inak, okrem osláv obdaríme aj vás. Veríme, že najkrajším darčekom pre vás bude pozvánka najšikovnejším na sústredenie, kde si užijeme kopec srandy. Už teraz sa na vás tešíme a prajeme vám veľa šťastia, vedomostí a nápadov pri rátaní.

Vaši milovaní vedúci *MATIK*a

## Ako bolo

### Sústredenie

Na konci školského roka sa už tradične zišli najúspešnejší riešitelia *MATIK*a spolu s pár vedúcimi, aby si užili týžden plný zábavy, zážitkov a hádam aj matematiky v krásnom prostredí Tatier. Netrvalo dlho a niektorí zo zúčastnených začali pochybovať o tom, či bolo rozumné sem chodiť. Všetkých nás totižto zavreli do basy a ani sme nevedeli prečo. Nič sme si nepamätali a mali sme pocit, že sme tu nespravodlivo. Tak sme začali pomýšľať na útek.

Prvé pokusy sa síce bacharom podarilo prekaziť, no nakoniec sa na nás usmialo šťastie a ocitli sme sa na slobode. Ako to už býva, keď sme tento problém vyriešili, vyskytol sa ďalší. Spomenuli sme si, že sme do basy nešli len tak pre nič za nič. Pôvodne sme tam mali zachrániť starého priateľa, Alfréda Špičku. Potrebovali sme sa teda do väzenia vrátiť. Žiadosť o prijatie nám neschválili, a tak bolo treba spáchať nejaký ten zločin.

Po rozhovore s Alfim sme sa dostali do veľmi zvláštneho laboratória. V denníku istého doktora Peppera stálo, že tam prebieha pokus, pri ktorom sa z nevinných (alebo aj vinných) väzňov stávajú vegáni a vyprodukovaná energia sa používa na výrobu záhadnej hnedastej tekutiny nápadne pripomínajúcej kolu.

Našťastie, nakoniec sa nám podarilo toto bezduché oberanie o možnosť sa ešte niekedy poriadne najesť ukončiť a zneškodniť doktora Peppera. Ostávalo nám už iba navrátiť vegánov na tú šťavnatejšiu životnú cestu. Pripravili sme plán, rozdelili úlohy a keďže sme všetci robili to, čo sme mali, podarilo sa nám vegánov premeniť nielen späť na ľudí, ale dokonca aj na Slovanov.

## *Tábor Mladých Matematikov*

Posledný júlový týždeň sme sa opäť vybrali do prostredia Tatier na Tábor Mladých Matematikov. Keďže sme chceli zažiť trochu srandy, pridali sme sa ku kočovnému párty kmeňu. Sranda síce bola, no všade, kde sme takúto veľkolepú párty zorganizovali, sme blízke okolie alebo aj celú planétu rozbili príliš hlasnou hudbou či divokým vyčítaním v párty ošiali. Museli sme sa teda stále niekam sťahovať.

Nikde nás však nechceli, a tak sme sfalšovali naše občianstvo. Podvod ale odhalili a boli sme vykázaní na odlahlú planétu, na ktorej ešte nikto nikdy nebol. Po zahájení ďalšej párty nás zatkla intergalaktická polícia a boli sme odsúdení na verejno-prospešné práce. Keď sme s touto podradnou činnosťou konečne skončili, podarilo sa nám nájsť ďalší nový domov, a tentokrát nás z planéty dokonca ani nik nevyhadzoval. Teda, aspoň to tak vyzeralo. V tom najmenej vhodnom momente sa zistilo, že celú našu realitu odkúpila istá pani, a my sme si museli nájsť inú realitu, v ktorej dožijeme svoje, miestami úbohé, životy.

Výzvu sa nám podarilo zvládnuť vďaka útržkom zo zápiskov cestovateľa Oderfa, ktorý už vo svojom živote všetky reality prešiel. Dobré mienené indície nám pomohli dostať sa do tej vysnívanej, kde nás už očakával legendárny cestovateľ Oderf.

## *Ako bude*

### *Lomihlav*

Aj tento rok na vás v decembri čaká Lomihlav. Je to súťaž štvorčlenných družstiev siedmeho až deviatego ročníka alebo sekundy až kvarty reprezentujúcich svoju školu. Ich úlohou je čo najlepšie vyriešiť dvadsať matematických úloh, päť hlavolamov a päť hádaniek. Tejto súťaže sa pravidelne zúčastňuje okolo dvesto žiakov základných škôl, najmä z východného Slovenska. Majú šancu sa niečo nové naučiť, porovnať svoje sily s ostatnými a stretnúť kamarátov so záľubou v matematike. Tohto roku sa bude Lomihlav konať v piatok, 2. 12. 2016. Bližšie informácie o súťaži a jej predchádzajúcich ročníkoch môžete nájsť na <http://matik.strom.sk/sk/lomihlav>.

### *Výlet*

Už sa nemôžeš dočkať ďalšieho sústredka a smútiš, že je ešte len september? Potom je jesenný výlet práve pre teba. Opäť budeš môcť stretnúť ľudí, ktorých vidíš len dvakrát do roka a zažiť s nimi kopec srandy. Jedinou nevýhodou je, že narozdiel od sústredka trvá výlet iba jeden deň a je cez víkend, no nevádi. Teraz by tu mala byť informácie kedy, kde a všetky ostatné veci, ktoré by mohli tvojich rodičov zaujímať. No ako je už zvykom, to sa ešte nevie, a tak pozorne sleduj Facebookovú stránku alebo <http://matik.strom.sk> a teš sa.

## Pravidlá súťaže

### Priebeh

Korešpondenčný matematický seminár *MATIK* je súťaž pre žiakov siedmeho až deviatego ročníka základných škôl, resp. sekundy až kvarty osemročných gymnázií. Zapojiť sa môžu aj mladší (im však odporúčame seminár Malynár – viac sa o ňom dozviete na stránke <http://malynar.strom.sk>). *MATIK* prebieha korešpondenčnou formou – počas zimnej časti dostaneš dve série po 6 úloh, ktoré vyjdú naraz v septembri. Riešenia tých úloh, ktoré sa ti podarí vyriešiť, a tých, kde prídeš aspoň na časť riešenia, pošli do uvedeného termínu na našu adresu alebo ich nahraj pod svojim profilom na našej webovej stránke. My ich opravíme, obodujeme a zostavíme poradie všetkých riešiteľov. Opravené riešenia úloh spolu s ďalším číslom časopisu, v ktorom nájdeš správne riešenia a poradie, dostaneš do školy, alebo ich nájdeš na našej webovej stránke. A ak sa budeš snažiť a skončíš medzi najlepšími, môžeš sa tešiť na 6-dňové sústredenie v peknom prostredí nabité zaujímavým programom, športom, hrami, matikou a skvelými kamarátmi. Sústredenie je určené pre členov minimálne prvých troch družstiev súťaže Lomihlav a riešiteľov seminára *MATIK*, ktorí sa v konečnom poradí umiestnili do 20. miesta.

### Bodovanie

Za správne vyriešenú úlohu získaš 9 bodov, za čiastočne správne alebo neúplné riešenie primerane menej. Do celkového poradia sa započítavajú body za:

**deviataci, kvarta:** všetky vyriešené úlohy

**ôsmaci, tercia:** päť najlepšie vyriešených úloh plus minimum z týchto piatich úloh

**siedmaci, sekunda:** päť najlepšie vyriešených úloh plus maximum z týchto piatich úloh

Primáni, šiestaci a mladší budú hodnotení rovnako ako siedmaci.

### Príklad

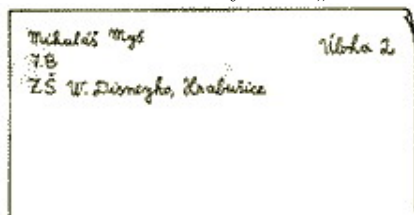
Traja bratia, deviatak Vlado, ôsmak Jaro a siedmak Marcel vyriešili všetky úlohy úplne rovnako (zhodou náhod, že) – za 3, 2, 4, 1, 5 a 4 body. Vlado potom získal  $3 + 2 + 4 + 1 + 5 + 4 = 19$  bodov, Jaro  $(3 + \underline{2} + 4 + 5 + 4) + 2 = 20$  bodov a Marcel  $(3 + 2 + 4 + \underline{5} + 4) + 5 = 23$  bodov. Jasně, nie?

### Ako písať riešenie

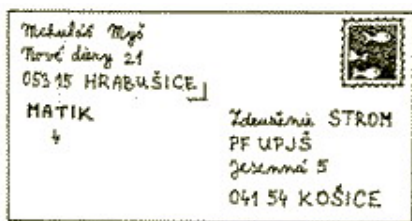
Úlohy rieš samostatne, neodpisuj ani nikomu nedávaj odpisovať, pretože za to **budeme strhávať body**. Výsledok úlohy, aj keď je správny, nestačí. Tvoje riešenie musí obsahovať podrobný **myšlienkový postup** – vysvetlenie, ako si pri riešení úlohy postupoval. Riešenie každej úlohy píš na samostatný papier formátu A4, ak je na viacerých listoch, zopni ich. Texty zadaní opisovať nemusíš. Každé riešenie musí mať v hlavičke **Tvoje meno, triedu, školu a číslo úlohy**. Riešenia posielaj na adresu:

**Združenie STROM, PF UPJŠ Jesenná 5, 041 54 Košice.**

Pod odosielateľa uveď výrazne „*MATIK*“.



Riešenie



Obálka

Riešenia môžeš taktiež nahrávať pomocou založeného účtu na našej webovej stránke <http://matik.strom.sk>. Všetky riešenia môžeš odovzdávať do 20:00. Dbaj na presné **dodržanie termínu** odovzdania, či už budeš riešenia posilať poštou alebo nahrávať na našej stránke (za oneskorenie ti **budeme strhávať body**). V prípade, že na našej stránke nastanú nejaké problémy, tak je tu možnosť poslať nám riešenia aj na našu adresu [riesenia@strom.sk](mailto:riesenia@strom.sk) (riešenia budú prijaté a opravené len v prípade, že váš profil je kompletne vyplnený).

### **Registrácia**

Pred odosielaním prvých príkladov sa nezapodni zaregistrovať na našej stránke, aby sme mali na teba nejaký kontakt. Registrácia na našej stránke funguje ako ekvivalent vyplnenia prihlášky do nášho semináru. Ak sa na našej stránke nezaregistruješ, tak sa môže stať, že o tebe nebudeme mať dostatok informácií. To môže dopadnúť napríklad tak, že ti nebudeme môcť poslať späť tvoje opravené úlohy alebo tvoje hodnotenia nebude možné zobrazit v poradí. Dokonca sa môže stať, že ťa nebudeme môcť kontaktovať v prípade, že získaš možnosť sa zúčastniť sústredenia.

### **Webová stránka**

Ak máš nejaké otázky na nás alebo k zadaniam, tak neváhaj navštíviť naše webové stránky. Pri každom príklade je *Diskusia*, ktorá slúži na to, aby si sa mohol opýtať na nejasnosti ohľadom zadaní. Ak ťa zaujíma niečo o našom seminári (či už tomto alebo pre starších/mladších) alebo by si len chcel pokecať s kamarátmi či zorganizovať nejakú akciu, tak sa neboj a zapoj sa do *Debaty* na našom webe. Ďalšia možnosť, ako nás kontaktovať, je mailom na adresu [matik@strom.sk](mailto:matik@strom.sk).

### **Edukačné okienko**

V časopise sa objavili okienka, ktoré sme tu doteraz nemali. Nebojte sa ich, je to len spôsob, akým vám chceme v skratke priblížiť vybranú matematickú tému, ktorá by sa vám mohla hodiť. Aby ste videli rovno jej využitie, tak príklady, ktoré sa nachádzajú v okienkach priamo súvisia s vysvetľovanou témou a preto vrelo odporúčame si ju prečítať.

## Zadania 1. série úloh Zimného semestra

Riešenia pošlite najneskôr **17. októbra 2016**

*Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na <http://matik.strom.sk>.*

Janči pocítil slnko na vlastnej koži. Pozdvihol zrak a uvidel ho. Tu, v oblakoch, bolo najväčším nepriateľom práve ono. Najst pred ním napoludnie úkryt bola otázka života a smrti. No Janči tu už bol dlho, veľmi dlho, a tak vedel, ako si poradiť. Odnepamäti zažíval tento každodenný rituál. Dožil sa dospelosti len vďaka dobrej výchove, ktorej sa mu ako dieťaťu dostalo. Dnešný úpek mu vyvolal spomienku na bájkky o mýtickej krajine Zem, ktorými ho počas prvých dní jeho života chlácholili rodičia. Prízračné tiene, sucho pod nohami a hmlisté rána, to všetko ho lákalo opustiť svoju domovinu. Tak sa teda rozhodol. Vydá sa na cestu! Pri takýchto hriechnych myšlienkach pocítil potrebu spytovať si svedomie.



### Úloha 1

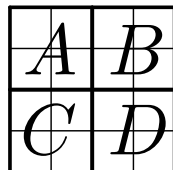
Jančiho svedomie tvorí 100 skutkov vykonaných v istom poradí, o ktorých bolo potrebné rozhodnúť, či sú dobré alebo zlé. Vnútorň hlas mu našepkal, že z každých piatich za sebou vykonaných skutkov sú práve tri skutky zlé. Janči si ešte uvedomil, že prvý a posledný skutok každého človeka je dobrý.

- Určte koľkokrát Janči spáchal nejaký zlý skutok.
- Rozhodnite, či bol šiesty Jančiho skutok dobrý alebo zlý.
- Vysvetlite, ako by ste vedeli pre ľubovoľný z týchto 100 skutkov správne určiť, či bol dobrý alebo zlý.

Keď vyriešil morálnu dilemu, mohol sa vybrať na cestu. Ale kam pôjde? Nemal ani potuchy, ako sa dostať na Zem. Za dlhý čas, ktorý tu prežil, sa však nazbieralo veľa ľudí (a keby len ľudí...), ktorí mu dlžili láskavosť, a to by sa mu mohlo konečne hodiť. V oblakoch používajú tridsaťdva hodinový deň a šesťnásť hodina už odbila. Rozhodol sa, že popoludnie vyplní návštevami.

## Úloha 2

Jančiho známi žijú v oblasti, ktorá má podobu mriežky  $4 \times 4$  (viď obrázok). Každú hodinu od 17. do 32. má v pláne navštíviť jedného z nich. Chce si to naplánovať tak, že priradí každému známemu (políčku mriežky  $4 \times 4$ ) jednu z týchto hodín (prirodzených čísel) tak, aby v každej štvrti (štvrtine mriežky, štvorci  $2 \times 2$   $A$ ,  $B$ ,  $C$  alebo  $D$ ) bol súčin hodín návštev deliteľný číslom 16. Je pre Jančiho možné takýto plán zostaviť? Svoje riešenie zdôvodnite.



Janči zistil, že by niečo mohol vedieť miestny šaman a mudrc Čierny Zmok. Býval ako správny šaman. V strome. Keďže v strome nemajú poriadne Wi-Fi, musel sa uňho zastaviť Janči osobne. Vykročil priamo smerom k chalúpkke medzi koreňmi stromu, ktorý rástol v oblaku. Po príchode ho privítala silná aróma. Na naliehanie ho Čierny Zmok vpustil do svojej chatrče. Po krátkej, ale búrlivej debata sa dohodli, že šaman Jančiho prevedie starobylým rituálom na zistenie pravdy. Poškrabal si nos a po kratšej úvahe zahlásil, že zadarmo nepracuje. Janči sa smutne otočil a pramálo chýbalo a bol by odišiel s dlhým nosom,

no pri otočke úkosom oka zazrel záhradného trpaslíka pri Zmokových hriadkach s kukuricou. Možno z neho nejaké tie grošíky dostane...

## Úloha 3

Keď k trpaslíkovi Janči podišiel, videl, že má 500 zlatiek. Vždy, keď trpaslíkom potrasie, vysype sa z neho 300 zlatiek, ak toľko ešte má. Ak nie, nevypadne z neho ani minca. Okrem toho mu Janči vie vložiť do úst práve 198 zlatiek naraz, ktoré trpaslík pridá k tým, čo v sebe má. Akej najväčšej hotovosti sa vie Janči zmocniť, pokiaľ na začiatku nemal ani deravý groš (a ani zlatku)? Trpaslíka môže kŕmiť a triasť koľkokrát chce a v ľubovoľnom poradí.

Po zaplatení zálohy šaman privolil, že Jančiho prevedie rituálom na zistenie pravdy. Ten má však veľmi zložitú choreografiu. Preto sa musel pozrieť do svojej knižnice. Medzi haldami zvitkov našiel ten, ktorý potreboval. Bol však veľmi starý a atrament na ňom bol už vyblednutý. Musel si teda overiť, či je náčrt správny, ináč by to mohlo mať neblahé následky na neblahého Zmoka. Čierny Zmok sa rozhodol overiť správnosť zvitku starodávnou skúškou.

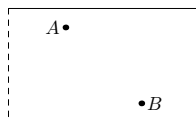
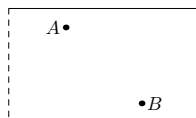
## Úloha 4

Na zvitku bol narysovaný štvorec  $ABCD$  a obdĺžnik  $DEFG$ , kde bod  $E$  ležal na polpriamke opačnej k  $BA$  a bod  $C$  bol bodom úsečky  $FG$ . Dokážte, že pri ľubovoľnej polohe bodu  $E$  je obsah obdĺžnika  $DEFG$  rovný obsahu štvorca  $ABCD$ .

Zablyslo sa a Janči sa cítil akosi divne. Videl akosi divne, počul akosi divne a zvláštny pohyb zavřil dielo rituálu. Čo sa s ním stalo? Niečo sa muselo určite pokaziť. Janči zrazu vedľa seba zbadal obrovské čierne kura. Bol to na prvý pohľad zmok. Čo ale bolo jasné až na druhý pohľad, bol to Čierny Zmok, miestny mudrc a šaman. Ale prečo je taký veľký, keď je to iba kura? A prečo už sám Janči ani nedovídi na vrcholec stromu? Janči sa skúsil pohnúť, no nepostúpil ani o piad. Potom si uvedomil, že oblaky sa vzdalujú. Zrazu zočil obrovský Zmokov zobák a len tak-tak sa mu uhol. Na svoje krídla si ešte iba privykal. Jančimu zišlo na um, že s krídlami môže predsa zletieť dolu na Zem! Veď je mucha. No to nie je také jednoduché, pretože oblaky sú riadne vysoko...

### Úloha 5

Najprv si Janči potrénuje lietanie. Od Zmokovho stromu (bod  $A$ ) chce preletieť k novovytunelovanému tunelu (čiarkovaná čiara), odtiaľ k rozpadnutému diaľničnemu úseku Nižná Váha – Vyšná Váha (druhá čiarkovaná čiara) a napokon domov (bod  $B$ ). Nájdite najkratšiu trasu Jančiho letu pre situáciu na obrázku naľavo a pre situáciu na obrázku napravo.



Janči, už určitý čas mucha, si konečne mohol splniť svoj sen. Odhodlal sa a skočil. Zanechal nežný páper rodného oblaku a nemal v úmysle sa obracať. Ako tak padal, všimol si nové divy. Prvé, čo ho prekvapilo, bol tieň. Keďže mu slnko nesvietilo tak prudko do očí, videl omnoho lepšie. Obzrel sa. Napravo sa zjavila vzducholoď, naľavo teplovzdušný balón a pred ním nejaký letúň. Priletel bližšie a sadol si na kokpit. Všimol si dve veci. Prvou, ktorú pobadal vďaka svojim muším zmyslom, bolo, že lietadlo práve malo namierené z Barcelony do Štrasburgu. Druhou bolo, že prvý pilot sa práve hral so šachovnicou a hracími kameňmi na dámu.

### Úloha 6

Na jednom políčku šachovnice  $8 \times 8$  leží čierny kameň a na ostatných políčkach biele. V jednom kroku môžeme zmeniť na opačné (čierne na biele a biele na čierne) súčasne všetky štyri kamene v ktoromkoľvek štvorci  $2 \times 2$  na šachovnici. Zistite, či po určitom počte krokov môže byť na šachovnici rovnaký počet kameňov oboch farieb.

Túto hru už Janči poznal, preto sa nad ňou iba uchechtol a pokračoval v lete. Ako sa čoraz viac približoval k Zemi, udivovalo ho, koľko je tam ľudí (a keby len ľudí...). Tolko života ešte pokope nevidel. Tak ho to ohromilo, že si nevšimol, že je už takmer na Zemi. Zrazu pristál. Tak ho to ochromilo, že posledné, čo si všimol, bolo čelné sklo auta, na ktorom pristál, a sériové číslo stierača, ktorý sa k nemu neodvratne blížil. Deväť.



## Zadania 2. série úloh Zimného semestra

Riešenia pošlite najneskôr **28. novembra 2016**

„Vypustíme ho?“ „Koho?“ „Plyna!“

Jančiho pomaly prechádzali mrákoty. Ako sa prebúdzal, začínal pomaly rozoznávať obrysy. V prvom rade obrys Jančiho vlastného chvosta. V pozadí stálo množstvo ďalších potkanov. Jeden z nich sa k nemu blížil. Na boku mal vypálené meno Plyno, ktorým sa hrdil ako odznakom znamenitej sily a statočnosti. Na prvý pohľad bolo vidno, že je to veľký šéf. Pri druhom pohľade si ale Janči všimol, že pravý šéf v ružovej košeli, havajských šortkách a slušivom klobúčku sa ukrýva v pozadí a že Plyno je zrejme len veľký poskok a veľké brucho. Už to vyzeralo, že je s Jančim amen, no našťastie sa, ako do všetkého, zamiešali vyššie sily. Komando tučných, tupých potkanov ozbrojených najmodernejším vybavením a neberúcich ohľad na životy miestnych, spustilo Paľbu. Paľba pristála tvrdo a pod jej krídlami sa rozvíril prach. Plyno sa nedal zmiast a vytrvalo Jančiho prenasledoval. Janči sa preto rozhodol zmiznúť čo najrýchlejšie.



### Úloha 1

Janči na úteku si chce urobiť prieskum okolia. Má v záujme prejsť si niekoľko strategických bodov. Vychádza z brlohu potkanieho šéfa a chce navštíviť hrad, družstevnú sýpku, palác, most a nábrežie a zakončiť svoje putovanie opäť v brlohu. Časy prechodu medzi jednotlivými miestami sú:

|                       |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| brloh - sýpka: 2,4    | sýpka - nábrežie: 1,0 | hrad - palác: 3,0     |
| brloh - most: 5,0     | sýpka - palác: 3,6    | hrad - most: 4,6      |
| brloh - nábrežie: 2,8 | sýpka - hrad: 3,8     | nábrežie - palác: 3,0 |
| brloh - palác: 3,4    | sýpka - most: 3,6     | nábrežie - most: 1,6  |
| brloh - hrad: 2,4     | hrad - nábrežie: 3,2  | most - palác: 3,2     |

Nakreslite obrázok a navrhните plán najkratšej možnej cesty pre Jančiho.

Janči si síce cestu naplánoval, no zistil, že možno nebude najlepší nápad vracať sa späť do brlohu. Zrazu sa naňho spoza rohu vyrútil Plyno. Janči sa tak dal na bezhlavý útek a po niekoľkých minútach zadýchaný uvidel hrad. Vyzeralo to, že má aspoň trochu času, a tak sa zastavil a premyslel si ďalší postup. Rozpamätal sa, že kým prebýval v oblakoch, v bájkach o Zemi sa spomínali aj miesta, z ktorých sa dá vrátiť späť. Jedno z nich by sa malo nachádzať aj niekde v okolí. Keďže v minulosti rád pozeral Indianu Jonesa, vedel, že tajné miesta sa spravidla nachádzajú v katakombách. Okrem toho, za pár hodín v potkanej koži si osvojil umenie tunelovania a navigácie v podzemí, takže vchod do kobiek pod hradom našiel a použil.

## Úloha 2

Janči sa ponoril do oparu katakomb a ocitol sa v hlavnej chodbe. Z nej viedlo mnoho bočných chodieb. Nad každým z východov bol osadený kameň s číslom. Janči si všimol, že súčet každých troch po sebe idúcich čísel je 20 alebo 22. Striedajú sa postupne v poradí 20, 20, 22, 22, 20, 20, 22, ... Nad prvým východom bolo číslo 9, nad deviatym 7. Aký je súčet čísel prvých 100 východov?

Akýsi inštinkt mu našepkal, že nemá zabočiť do žiadnej z týchto chodieb, a tak sa ocitol na konci tej hlavnej pred masívnymi dverami. Otvoril ich a v malej miestnosti na stene zbadal nápis napísaný písmom, ktoré sa používa v ríši v oblakoch.

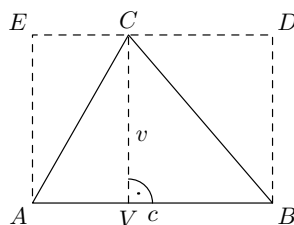
### Ako sa počíta obsah trojuholníka?

Obsah všetkých trojuholníkov sa dá vyjadriť pomocou dĺžky ktorejkoľvek jeho strany a výšky trojuholníka na túto stranu. Ak však chceme zistiť, ako ho vyjadriť, musíme rozobrať niekoľko možností:

*Ak má pri vybranej základni samé ostré uhly:*

Pozrime na obrázok. Obsah trojuholníka  $ABC$  je súčtom obsahov dvoch menších trojuholníkov. Vidíme, že obsah menšieho trojuholníka  $AVC$  a podobne obsah trojuholníka  $BVC$  je polovicou obsahu obdĺžnika  $VBDC$ . Súčet obsahov týchto obdĺžnikov je rovnaký ako obsah celého veľkého obdĺžnika  $ABDE$ , preto súčet obsahov menších trojuholníkov (čiže obsah trojuholníka  $ABC$ ) je polovicou obsahu obdĺžnika  $ABDE$ . Teda

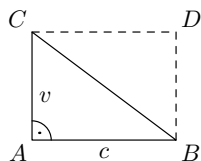
$$S(ABC) = \frac{S(ABDE)}{2} = \frac{c \cdot v}{2}.$$



*Ak má pri vybranej základni pravý uhol:*

Z obrázka vidíme, že obsah trojuholníka  $ABC$  je polovicou obsahu obdĺžnika  $ABDC$ , teda

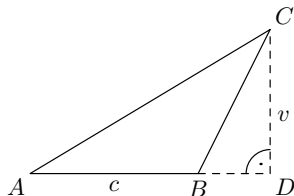
$$S(ABC) = \frac{c \cdot v}{2}.$$



*Ak má pri vybranej základni tupý uhol:*

Obrázok dokreslíme podobne ako v prvom prípade. Obsah trojuholníka  $ABC$  teraz dostaneme rozdielom obsahu pravouhlých trojuholníkov  $ADC$  a  $BDC$ , teda

$$S(ABC) = \frac{|AD| \cdot v}{2} - \frac{|BD| \cdot v}{2} = \frac{(|AD| - |BD|) \cdot v}{2} = \frac{c \cdot v}{2}.$$



Dost super – vo všetkých troch prípadoch sme zistili, že výsledok je rovnaký: obsah každého trojuholníka vieme teda vyjadriť ako súčin dĺžky jeho strany a výšky na túto stranu a to celé deleno 2:

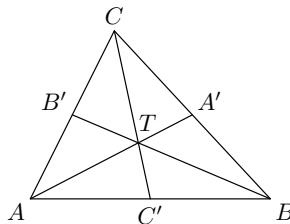
$$S(ABC) = \frac{c \cdot v}{2}$$

### Čo je to ťažnica?

Ťažnica na stranu trojuholníka je úsečka, ktorá spája stred tejto strany a vrchol oproti nej. Všetky 3 ťažnice sa pretínajú v jednom bode.

### Aké majú ťažnice využitie pri počítaní obsahov?

Ťažnica delí trojuholník na dva menšie trojuholníky, ktorých základne sú rovnako dlhé a ich výškou je tá istá úsečka. Ich obsah je teda rovnaký tiež.



### Úloha 3

Ukážte, že 6 trojuholníkov, ktoré vznikli rozdelením trojuholníka tromi ťažnicami, má rovnaké obsahy. Ťažnice sa vždy pretínajú v jednom bode, ktorý nazývame ťažisko.

Keď si Janči z volajakých dôvodov príklad prerátal, zavalil ho nával informácií a schopností. Povzbudený sa vydal prehladať ďalšie časti kobiek. Po krátkom ponevieraní sa naďabil na oválnu miestnosť. Dominoval jej veľký stôl z masívneho dubového dreva. Za ním sedelo a rokovalo niekoľko mocných tohto sveta. Vyzerali však, že ich to veľmi netrápi, a tak si hádzali akousi údiv vzbudzujúcou kockou.

### Úloha 4

Na stole ležala kocka a po poslednom hode vyzerala takto: V jej vrcholoch sa vznášali čísla od 1 po 8 (každé práve raz). Na každej stene kocky bol vyrytý súčet čísel, ktoré sa nachádzali vo vrcholoch príslušnej steny. Bolo zaujímavé, že všetky súčty na stenách, ktoré Janči videl (tých stien bolo päť), boli prvočísla a neboli medzi nimi žiadne dve rovnaké. Aké číslo bolo na šiestej stene kocky?

Janči sa mocných zľakol. Zatiaľ sa mu tento svet nepáčil. Každý ho iba naháňal a on nevedel, čo sa deje. Chcel sa vrátiť hore. Priblížil sa k záračnej kocke a do nosa mu udrela vôňa jeho otčiny. Okamžite si uvedomil, že (kocka) pochádza z nebies. Lenže to by znamenalo, že niekto sa už pred ním na zem vydal. Tento pocit v Jančim rozprúdil odhodlanie, a tak podišiel k mocným v očakávaní, že mu pomôžu s návratom naspäť do nepohodlného, ale pokojného nebeského sveta. Mocní sa nazdali, že by Jančiho mohli využiť a spýtať sa ho na otázku, ktorá ich už dlho trápila.

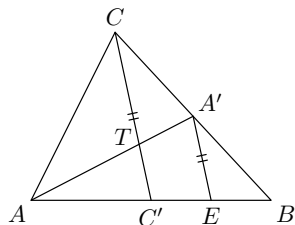
### Úloha 5

Chceli, nech Janči dokáže, že ak si ľubovoľne zvolíme 55 rôznych celých čísel od 1 do 100 vrátane, budú medzi nimi dve, ktorých rozdiel je 9, dve, ktorých rozdiel je 10, dve, ktorých rozdiel je 12 a dve, ktorých rozdiel je 13. Prekvapujúco sa mocní nevedeli zmocniť vždy takých dvoch čísel, ktorých rozdiel je 11, takže treba ukázať, že také tam byť nemusia.

Keď už Janči vyriešil odveký problém mocných, vypýtal si svoju zaslúženú odmenu. Tú ale mocní podmienili účasťou na prednáške.

#### V akom pomere sa rozdeľujú dve ťažnice navzájom?

Úsečky  $CC'$  a  $AA'$  sú ťažnice, ktoré sa pretínajú v bode  $T$ . Do obrázka dokreslíme strednú priečku trojuholníka<sup>1</sup>  $BC'C$  – úsečku  $A'E$ , tá je rovnobežná s  $CC'$ . Bod  $E$  rozdeľuje  $C'B$  na polovicu, čo znamená, že  $AE$  sú  $3/4$  a  $AC'$  sú  $2/4$  z  $AB$ . Je jednoducho viditeľné, že trojuholníky  $AC'T$  a  $AEA'$  sú podobné, a to v pomere  $2 : 3$  (ako ich spomínané strany). To znamená, že aj všetky ich strany sú v tomto pomere, a teda úseky ťažnice  $AA'$  po rozdelení ťažiskom  $T$  sú v pomere  $AT/TA' = 2 : 1$  (kratšia časť je bližšie ku strane  $AB$ ). To platí aj pre ostatné dvojice ťažníc.

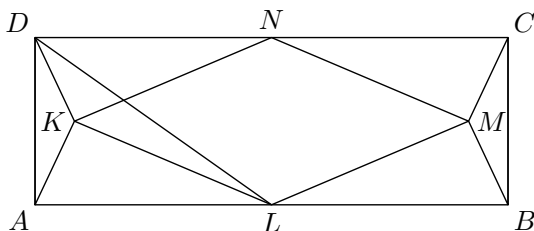


#### Prečo sa pretínajú v jednom bode

Pozrime na ťažnicu  $CC'$ . Vieme, že ťažnica  $AA'$  ju pretína v  $2/3$  (bližšie ku strane  $AB$ ) v bode  $T$ . Pre ťažnicu  $BB'$  platí taktiež, že pretína  $CC'$  v  $2/3$  (bližšie ku strane  $AB$ ), čo znamená, že pretínajú  $CC'$  v tom istom bode  $T$ . Tento bod  $T$  sa nazýva ťažiskom, ako sme už uviedli vyššie.

### Úloha 6

V obdĺžniku  $ABCD$  sa nachádzajú body  $K, L, M$  a  $N$  ako na obrázku. Daný útvar na obrázku je osovo súmerný podľa osí  $KM$  aj  $NL$ . Pritom platí, že  $|\sphericalangle ADK| = |\sphericalangle CDL| = 30^\circ$ . Akú časť plochy obdĺžnika  $ABCD$  zaberá kosoštvorec  $KLMN$ ?



<sup>1</sup>Stredná priečka trojuholníka je úsečka spájajúca stredy dvoch strán, je rovnobežná s tretou stranou a má oproti nej polovičnú dĺžku.

Prednáška prehmela a Janči pod neobyčajne vysokým stropom zbadal tvár, ktorá v ňom vzbudila vzdialené spomienky. Až teraz si uvedomil, že mu bola vtieravo povedomá. Palba sa zniesla bližšie k zemi. Schytila Jančiho do pazúrov a jazdila s ním chodbami kobiek. Tentokrát mal už Janči dost času, aby si Palbu prezrel lepšie. Bola čierna ako noc. Medzičasom unášala Jančiho z hradu preč do výšin. Janči na domov ani nepomyslel, jeho myseľ uchvátila myšlienka, že Palbu pozná lepšie, ako je mu zrejme. V priebehu letu si stihol všimnúť napríklad, že krákala čosi kuracou rečou. Vo chvíli, keď sa dostali na úroveň oblakov, bol Janči Palbou načisto posadnutý, čo iba posilnila skutočnosť, že práve vtedy začal zachytávať význam jej slov. Janči, už pripravený na zarážajúce odhalenia, k akým v oblakoch dochádzalo, očakával nádhernú pravdu o Palbe. Namiesto toho rozoznal výrok hodný mudrca: „Janči? Všimol si si, aké to má s brýlna grády? Vitaj doma!“ Tak Janči spoznal skutočný zdroj múdrosti Čierneho Zmoka.





*Za podporu a spoluprácu ďakujeme*



**Názov**            *MATIK* – korešpondenčný matematický seminár  
 Číslo 1 • September 2016 • Zimný semester 30. ročníka (2016/2017)

**Internet:**       <https://matik.strom.sk>

**E-mail:**           [matik@strom.sk](mailto:matik@strom.sk)

**Vydáva:**          Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

**Internet:**        <https://zdruzenie.strom.sk>

**E-mail:**           [info@strom.sk](mailto:info@strom.sk)