KOREŠPONDENČNÝ MATEMATICKÝ SEMINÁR

MATIK

ČÍSLO **2** — ROČNÍK **26** — INTERNET http://matik.strom.sk

Zdravím Ťa!

Milý držiteľ tohto časopisu, práve sa nachádzaš medzi stránkami úplne nového *MATIK*a, ktorý, ako inak, obsahuje veľmi zaujímavé rubriky. Nachádza sa tu nielen rubrika poradie, ktorá ťa iste zaujíma, ale aj rubrika 2. séria, ktorá tú predošlú určite zmení! Tak nestrácaj čas čítaním úvodu, vezmi pero, papier a hybáj rátaním rozšíriť svoje vedomosti z oblasti matematiky...

Vaši vedúci *MATIK*a

Ako bolo

Výlet Poslednú septembrovú sobotu sme sa v hojnom počte stretli, aby sme sa dozvedeli čosi o živote Leonida Dunu. Prenášadlom sme sa preniesli do Spomienkova. Po ceste z Kostolian nad Hornádom sme si užili kopec zábavy a hier, pri ktorých sme získavali spomienky Leonida Dunu na jeho život. Na konci sa nám samozrejme vybili baterky v prenášadle a museli sme ich nabiť. Napokon sa nám to podarilo a šťastne sme dorazili do Košíc. Cesta sa však oplatila nielen kvôli životnému príbehu hlavného hrdinu, ale hlavne kvôli skvelej atmosfére a nálade účastníkov výletu – čiže nás.

Ako bude

Lomihlav Aj tento rok na vás v novembri čaká Lomihlav. Je to súťaž štvorčlenných družstiev žiakov siedmeho až deviateho ročníka, alebo sekundy až kvarty, reprezentujúcich svoju školu. Ich úlohou je čo najlepšie vyriešiť 20 matematických úloh, 5 hlavolamov a 5 hádaniek. Tejto súťaže sa pravidelne zúčastňuje vyše stovka žiakov zo základných škôl, najmä z východného Slovenska. Majú šancu sa niečo nové naučiť, porovnať svoje sily s ostatnými a stretnúť kamarátov so záľubou v matematike. Tohto roku sa bude Lomihlav konať v piatok 30.11.2012 v CVČ DOMINO na Popradskej 86 v Košiciach. Bližšie informácie o súťaži a jej predchádzajúcich ročníkoch môžete nájsť na `http://matik.strom.sk/lomihlav.php`.

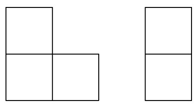
Vzorové riešenia 1. série úloh

1 opravovali **Aktka Krajčiová** a **Maťo Vodička**
najkrajšie riešenie: Adam Urbán, Samuel Chaba

71 riešení

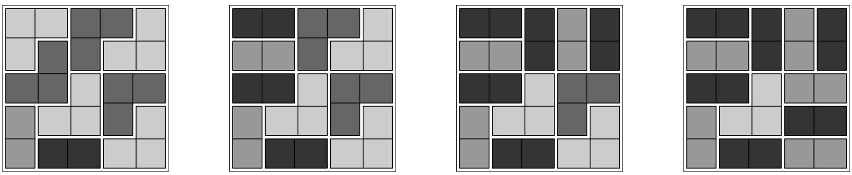
Zadanie

Ignáciova kadibúdka má tvar podlahy v tvare štvorca 5×5 metrov, ktorý chceme vykachličkovať dvoma typmi kachličiek (pozri obrázok), ktorých dlhšia strana má dĺžku 2 metre a kratšia 1 meter. Koľko kachličiek ktorého typu na to môžem použiť? Nájdite všetky možnosti a ku každej nakreslite jedno možné usporiadanie.



Vzorové riešenie

Kadibúdka má plochu $5 \times 5 = 25$ štvorčekov (1 štvorček = 1 m^2). Vieme, že menšia kachlička pokryje 2 štvorčeky, väčšia 3. Hocijaký počet menších kachličiek pokryje párny počet štvorčekov, lebo to musí byť násobok plochy jednej kachličky (teda násobok 2). Menšími a väčšími kachličkami spolu ale potrebujeme pokryť nepárny počet štvorčekov (25), a teda väčšie kachličky musia pokryť nepárny počet. A to docielime len tak, že ich použijeme tiež nepárny počet, lebo ak by sme 3 (obsah kachličky) vynásobili párnym číslom, vyjde číslo párne, čo nechceme.
Teraz už môžeme vyskúšať možnosti. Ak použijeme jednu (najmenšie nepárne číslo) väčšiu kachličku, tak pokryje 3 štvorčeky. Ostáva nám teda $25 - 3 = 22$ štvorčekov, na čo spotrebujeme jedenásť menších kachličiek. Obdobne pokračujeme pre všetky nepárne počty ďalej.
Tri väčšie nám pokryjú 9 štvorčekov, teda ostáva $25 - 9 = 16$, čo pokryje osem menších kachličiek. Päť väčších pokryje 15 štvorčekov, ostáva nám ešte 10, čo pokryje päť menších kachličiek. Ďalšia možnosť je sedem väčších a dve ($(25-21)/2$) menšie kachličky. Viac ich dať nemôžeme, lebo už deväť väčších kachličiek pokryje 27 štvorčekov, čo je viac ako 25, teda ďalšie nepárne čísla skúšať netreba.
Našli sme 4 možnosti, no aby sme si boli istí, že vyhovujú, musíme ku každej nájsť ešte aspoň jedno možné usporiadanie kachličiek, teda ku každej možnosti prihodíme ešte jeden obrázok. Po chvíli kreslenia ľahko dospejeme napríklad k týmto 4 obrázkom:



Na vykachličkovanie Leonidovej kadibúdky môžeme použiť 11 menších a 1 väčšiu, 8 menších a 3 väčšie, 5 menších a 5 väčších alebo 2 menšie a 7 väčších kachličiek.

Komentár

Úloha nebola ťažká, o čom svedčí vysoký počet 9-bodových riešení, no nabudúce, ak si myslíte, že niečo platí (napríklad že ich musí byť nepárny počet), tak to treba aj dokázať, nielen napísať. A to platí v každej podobnej úlohe. Treba si však dať pozor aj na to, že keď skúšate možnosti, musíte vyskúšať naozaj všetky. Napríklad niektorí z vás zabudli na možnosť s 0 väčšími kachličkami (a nedokázali, že musí byť počet nepárny). A ak sa vám nedarí niečo nakresliť, nevzdávajte to :)

2 opravovali **Deniska Semanišinová** a **Maťo Rapavý**

najkrajšie riešenia: Martin Melicher

74 riešení

Zadanie

V hre Ej Bisťu sa hádže dvomi kockami, neráta sa však súčet bodiek na kockách, ale ich súčin. Aké bolo Manuelino skóre vo všetkých piatich hodoch, ak viete, že:

- Skóre v druhom hode je o 5 väčšie ako skóre v prvom.
- Skóre v treťom hode je o 6 menšie než skóre v druhom.
- Skóre vo štvrtom hode je o 11 väčšie než skóre v treťom.
- Skóre v piatom hode je o 8 menšie než skóre v štvrtom.

Vzorové riešenie

Najprv si zistíme, aké hodnoty súčinu mohli na dvoch kockách padnúť:

$\times$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Teda skóre, ktoré mohlo padnúť na dvoch kockách je: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30 a 36.

1. riešenie:

Skóre v prvom hode si označíme A, v druhom B, v treťom C, v štvrtom D a v piatom E. Vzťahy zo zadania si zapíšeme pomocou jednoduchých rovníc a vyjadríme si ich pomocou premennej A.

- $B = A + 5$ (skóre z druhého hodu je o 5 väčšie, ako skóre z prvého hodu)
- $C = B - 6 = (A + 5) - 6 = A - 1$ (za B sme dosadili $A + 5$, čo poznáme z predchádzajúceho riadku)
- $D = C + 11 = (A - 1) + 11 = A + 10$ (za C sme dosadili $A - 1$, čo poznáme z predchádzajúceho riadku)
- $E = D - 8 = (A + 10) - 8 = A + 2$ (za D sme dosadili $A + 10$, čo poznáme z predchádzajúceho riadku)

Čiže skóre v druhom hode bolo o 5 väčšie než skóre v prvom hode. Skóre v treťom hode bolo o 1 menšie než skóre v prvom hode. Skóre v štvrtom hode bolo o 10 väčšie než skóre v prvom hode a skóre v piatom hode bolo o 2 väčšie než skóre v prvom hode. Vieme, že skóre v prvom, druhom, treťom, štvrtom, aj piatom hode musí byť súčin 2 čísel, ktoré sa dajú hodiť na kocke, teda je to jedno zo skóre pod tabuľkou.

Najprv sa pozrieme na prvé dva hody. Vieme, že skóre v 1. hode je o 5 väčšie ako skóre v 2., teda že $B = A + 5$. Teraz nám už len stačí dosadiť jednotlivé možnosti za A a overiť, či sa medzi číslami pod tabuľkou nachádza aj číslo o 5 väčšie. Ak nie, vieme, že tieto možnosti v 1. hode určite hodené neboli. Sú to možnosti 2, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 30 a 36.

Ostali nám skóre 1, 3, 4, 5, 10, 15, 20 a 25. Potom sa pozrieme na prvý a tretí hod. Každú z týchto možností dosadíme do vzťahu $C = A - 1$ a zistíme, pre ktoré zo zvyšných možností sa skóre o 1 menšie nenachádza medzi hodnotami pod tabuľkou (nedá sa získať ako súčin hodov na 2 kockách). Nevyhovujú možnosti 1, 15 a 20. Ostanú nám možnosti: 3, 4, 5, 10 a 25. Rovnako sa pozrieme na hodnoty o 10 väčšie od zvyšných možností. Vylúčime 3, 4 a 25, ostanú nám možnosti 5 a 10. Pri poslednej podmienke hľadáme číslo o 2 väčšie, čiže vylúčime 5, keďže 7 sa medzi možnosťami pod tabuľkou nenachádza. V prvom hode teda padlo skóre 10. Ostatné hody už len dorátame. V druhom hode padlo skóre 15, v treťom 9, v štvrtom 20 a v piatom 12.

2. riešenie:

Mnohí z vás sa pokúšali riešiť úlohu skúšaním, no neodniesli si plný počet bodov, preto netradične uvedieme aj toto riešenie. Pokiaľ sa úlohu rozhodnete riešiť skúšaním, tak to neznamená, že po nájdení prvého riešenia sa úloha končí, ale musíte si byť istí, že ste našli **všetky** riešenia a žiadne iné **neexistuje.**

Tak isto ako v úvode prvého riešenia zistíme, aké skóre môžeme dostať, ako súčin 2 čísel, ktoré môžu padnúť na kockách. Na 2 kockách môže padnúť skóre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30 a 36.

Každú z týchto hodnôt dosadíme za skóre v prvom hode a dorátame skóre v ostatných hodoch. Pokiaľ pri niektorom hode dospejeme k číslu, ktoré sa nedá hodiť dvoma kockami (nenachádza sa medzi skóre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30 a 36) tak skóre, ktoré sme dosadili do 1. hodu v ňom určite padnúť nemohlo (pretože niektoré z čísel, ktoré podľa podmienok v zadaní museli padnúť v niektorom ďalšom hode sa nedá dostať ako súčin čísel na dvoch kockách). Na znázornenie nám poslúži takáto tabuľka:

1. hod	**2. hod**	**3. hod**	**4. hod**	**5. hod**	**poznámka**
1	6	0			0 sa hodiť nedá
2	7				7 sa hodiť nedá
3	8	2	13		13 sa hodiť nedá
4	9	3	14		14 sa hodiť nedá
5	10	4	15	7	7 sa hodiť nedá
6	11				11 sa hodiť nedá
8	13				13 sa hodiť nedá
9	14				14 sa hodiť nedá
10	15	9	20	12	správna možnosť
12	17				17 sa hodiť nedá
15	20	14			14 sa hodiť nedá
16	21				21 sa hodiť nedá
18	23				23 sa hodiť nedá
20	25	19			19 sa hodiť nedá
24	29				29 sa hodiť nedá
25	30	24	35		35 sa hodiť nedá
30	35				35 sa hodiť nedá
36	41				41 sa hodiť nedá

Komentár

Pokiaľ riešim ľubovoľnú úlohu a nájdem výsledok, musím sa zamyslieť: Je to jediné riešenie? Čo ak má táto úloha viac riešení? Pokiaľ je to jediné riešenie, musím to ukázať, pokiaľ má úloha viac riešení, musím ukázať, že sú to všetky riešenia. Teda nájsť jedno riešenie nestačí. Mnohí z vás sa túto úlohu pokúšali riešiť skúšaním, no neuvedomili si, že pokiaľ chcú nájsť všetky riešenia musia vyskúšať všetky možnosti. Druhým problémom v tejto úlohe bolo to, že ste nám do riešenia napísali: „Takto som vyskúšal všetky možnosti a jediné správne riešenie mi vyšlo... " . V takomto riešení nemáme za čo udeliť body a má pre nás hodnotu ako výsledok bez odôvodnenia. Aké sú všetky možnosti? Ako máme vedieť, že ste ich naozaj vyskúšali? Prečo niektoré možnosti nevyhovujú? Veríme, že pri najbližšom riešení si tieto problémy uvedomíte a budete sa im venovať.
Za nájdenie správneho riešenia sme udelili 2-4 body podľa zvyšného komentára k úlohe. Pokiaľ ste v správnom riešní niečo nevysvetlili alebo nedokázali, strhli sme 1-2 body.

3 opravovali **Matúš Hlaváčik** a **Dano Till**

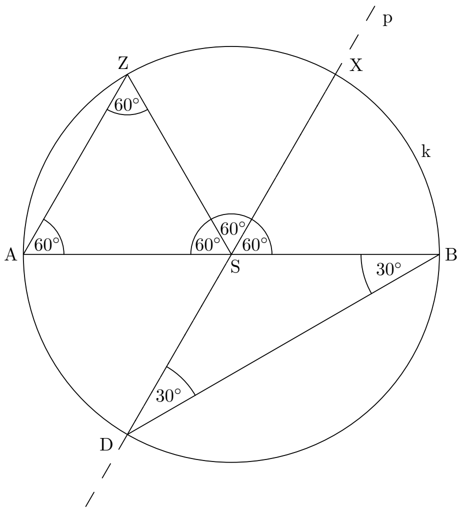
najkrajšie riešenia: Martin Masrna, Juraj Mičko

57 riešení

Zadanie

Mám gumu na kolese v tvare kružnice k so stredom v skrutke S a polomerom 1 centimeter. Priemer tejto kružnice je AB a žuvačka Z je tretí bod na kružnici. Os uhla ZSB pretne kružnicu v polrovine opačnej k ABZ v bode D. Aká je dĺžka úsečky AZ, ak veľkosť uhla ABD je 30°?

Vzorové riešenie



Na začiatok označme bod, kde priamka vedená bodmi D a S pretína kružnicu k, ako bod X. Všimnime si, že úsečky SD, SB, SX, SZ a SA sú rovnako dlhé, pretože všetky sú polomermi kružnice, teda sú rovné 1 cm.
Keďže SD a SB sú rovnako dlhé, znamená to, že trojuholník SDB je rovnoramenný, čo znamená, že uhly pri základni sú rovnako veľké, teda $|\sphericalangle SDB| = |\sphericalangle SBD| = 30°$. Keďže súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°, tak:
$|\sphericalangle DSB| = 180° - 30° - 30° = 120°$.
Uhly XSB a BSD sú susedné (ich súčet je 180°), z čoho dostávame $|\sphericalangle XSB| = 180° - |\sphericalangle BSD| = 180° - 120° = 60°$.
Vieme, že priamka DX je osou uhla ZSB, teda aj priamka SX je osou uhla ZSB (pretože bod S leží na priamke DX), teda $|\sphericalangle XSZ| = |\sphericalangle XSB| = 60°$.

Uhol ASB je priamy (má veľkosť $180°$) a vidíme, že $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle ASZ| + |\sphericalangle ZSX| + |\sphericalangle XSB|$, teda $|\sphericalangle ASZ| = |\sphericalangle ASB| - |\sphericalangle ZSX| - |\sphericalangle XSB| = 180° - 60° - 60° = 60°$. Teraz si všimnime trojuholník ASZ. Vieme o ňom, že strany AS a ZS sú rovnako dlhé (polomery tej istej kružnice), teda tento trojuholník bude rovnoramenný so základňou AZ, takže uhly pri základni budú rovnako veľké. Súčet uhlov v trojuholníku je $180°$, čo znamená, že $|\sphericalangle SAZ| + |\sphericalangle SZA| + 60° = 180°$, teda $|\sphericalangle SAZ| + |\sphericalangle SZA| = 120°$. Uhly SAZ a SZA majú teda veľkosť $120°/2 = 60°$.
Teraz vidíme, že všetky tri vnútorné uhly v trojuholníku ASZ sa rovnajú ($60°$), teda tento trojuholník je rovnostranný, čo znamená, že všetky jeho strany sú rovnako dlhé. Strany AS a ZS sa rovnajú polomeru (1 cm), teda aj $|AZ| = 1$ cm.

Komentár

Mnohí z vás boli na dobrej ceste a pri písaní riešenia písali rôzne argumenty a vzťahy. Bohužiaľ ste však nenapísali, prečo platia. To je zlé, pretože aj keď ste mali pravdu, nemohli sme vedieť, ako ste to zistili, a tak išli body dole. Taktiež veľa z vás to chcelo riešiť tak, že ste si to narysovali a potom odmerali. Takéto riešenie nie je matematicky korektné, pretože rysovanie je nepresné a keby výsledok nebol takým pekným číslom, tak by ste odmerali vzdialenosť a vyšlo by vám niečo iné. Nabudúce sa takýmto riešeniam vyvarujte.

4

opravovali **Dorka Jarošová** a **Matúš Stehlík**

najkrajšie riešenie: Viktória Brezinová, Martin Mihálik

57 riešení

Zadanie

Na rázcestí, kde sa križovatka rozdvojuje, stoja dvaja páni. Jedna cesta nás dovedie do kostola a druhá do záhuby. Jeden z nich je klamár a druhý pravdovravec (prvý vždy klame, druhý vždy hovorí pravdu). Na otázky odpovedajú len slovami „oná“ a „ein“ . Jedno z nich znamená áno, druhé nie, no keďže nerozumiete slangu ich gangu, neviete ktoré je ktoré. Na jednu otázku môže odpovedať len jeden z nich. Viete zistiť správnu cestu položením len dvoch otázok? Aké otázky sa treba opýtať?

Vzorové riešenie

1. riešenie:

V tomto riešení najprv zistíme čo znamenajú slová *oná* a *ein*. Spýtame sa niektorého z pánov prvú otázku: *„Si pravdovravec?“* Daný človek nám určite odpovie *áno* (vo svojom slangu). Pretože pravdovravec povie pravdu *„Áno, som pravdovravec“* a klamár zaklame *„Áno, som pravdovravec.“* Odpoveď, ktorú sme dostali, teda určite znamenala *áno*. Slovíčko ich slangu, ktoré v predošlej odpovedi nepoužili musí nutne znamenať nie. Tak povedzme, že si vytvoríme malý výkladový slovník a už pánom rozumieme.
Druhou otázkou chceme zistiť, ktorá cesta vedie do kostola. Prefíkane sa niektorého pána spýtame: *„Čo by nám odpovedal ten druhý, keby sme sa ho spýtali, či pravá cesta vedie do kostola?“* Obaja nám s radosťou odpovedia klamstvo na otázku *„Vedie pravá cesta do kostola?“* . Pretože pravdovravec povie pravdu,

že klamár by nám povedal klamstvo. Klamár zaklame, že pravdovravec by nám povedal klamstvo. Tak či tak, dozvieme sa klamstvo. Takže ak nám odpovedia *áno*, vydáme sa ľavou cestou. V opačnom prípade tou pravou.

2. riešenie:

Spýtame sa tieto dve otázky toho istého človeka: *„Je* $1 = 1$*?"* a *„Vedie pravá cesta do kostola?"* . Dosť zvláštne otázky, nie? Veď im ani nerozumieme, ako z tohto môžeme zistiť cestu do kostola? Skúsme to takto:

• Ak nám daný človek odpovedal na obe otázky rovnakým slovom, tak pravá cesta vedie do kostola.

• Ak odpovedal rôzne, potom pravá cesta vedie do záhuby.

Znie to ako mágia, všakže? Teraz si Ty, milý čitateľ, premysli, prečo to tak bude. . . Máš? Výborne, tak zvyšok riešenia už čítať nepotrebuješ, ale ak Ťa náhodou ešte zaujíma, ako sa to vlastne ukáže, tak veselo pokračuj. Rozoberieme všetky prípady.
– Nech pravá cesta vedie do kostola. Pravdovravec odpovie na obe otázky *áno,* klamár na obe *nie.* Každý z nich odpovedal na obe otázky rovnakým slovom. Takže v týchto prípadoch by sme správne zistili cestu.
– Teraz nech pravá cesta vedie do záhuby. Pravdovravec odpovie na prvú otázku *áno* a na druhú *nie.* Klamár presne naopak odpovie na otázky postupne *nie* a *áno*. Odpovede sa líšili, čiže by sme opäť našli správnu, teda ľavú cestu do kostola.

Komentár

V úlohe sme nevedeli 3 informácie: ktorá cesta vedie kam, kto hovorí pravdu a kto nie, a nakoniec ani to, že ktoré slovo čo znamená. Na dve otázky sme asi nevedeli zistiť všetky tri, no podstatné bolo uvedomiť si, že nás v skutočnosti zaujíma len prvá, aby sme zistili, kam máme ísť. Ostatné už je vedľajšie. Viacerí riešitelia si nevysvetlili zadanie úplne správne a domýšľali si, ktoré slovo čo znamená alebo, ktorý pán hovorí pravdu. . . Veľmi oceňujeme vašu kreativitu a to, že ste prišli na to, že slová *oná* a *ein* sú vytvorené z áno a nie (ospravedlňujeme sa, ak to bolo príliš zavádzajúce), no v zadaní bolo tiež napísané, že neviete, ktoré je ktoré. Preto sa treba vedieť pri písaní riešenia odosobniť od takýchto pocitov a pracovať naozaj len s informáciami, ktoré sú dané (toto znie múdro, možno sa vám to niekedy zíde).

5

opravovali **Janka Baranová** a **Rišo Trembecký**

najkrajšie riešenia: Lenka Kopfová, Lívia Knapčoková

68 riešení

Zadanie

Nájdite všetky také dvojice prirodzených čísel, že ich súčet sa rovná dvojnásobku ich súčinu. Zdôvodnite, že iné dvojice neexistujú.

Vzorové riešenie

Označme naše hľadané dvojice prirodzených čísel ako A, B. Chceme nájsť všetky také dvojice, pre ktoré platí:

$$A + B = 2A \cdot B.$$

Zároveň chceme ukázať, že iné neexistujú.

1. riešenie:

Z rovnice vidno, že A aj B delia pravú stranu rovnice, takže musia deliť aj ľavú stranu (aby nastala rovnosť). Potom A má deliť $A + B$. Keďže platí, že A delí A, musí platiť aj A delí B. Zároveň obdobne pre B, keďže B delí B, musí deliť aj druhý sčítanec, teda A. Ak A delí B a zároveň B delí A, tak to znamená, že $A \leq B$ a zároveň $B \leq A$, čo nastáva iba vtedy, keď $A = B$. Dosadíme do rovnice:

$$A + A = 2A \cdot A$$

$$2A = 2A \cdot A$$

Rovnicu predelíme $2A$ (môžeme, keďže A je nenulové (prirodzené)) a dostávame $1 = A$. Keďže $A = B$, vznikla nám dvojica čísel 1, 1. Už len overíme, či pre ne platí zadanie: $1 + 1 = 2 \cdot 1 \cdot 1$, čo zjavne platí.

2. riešenie

Zo zadania sme dostali rovnicu s dvoma písmenkami (neznámymi). Chceme ju upraviť tak, aby sme jedno písmenko (v našom prípade B) vyjadrili len pomocou druhého písmena (A). Rovnicu upravujeme:

$$A + B = 2A \cdot B$$

$$A = 2A \cdot B - B$$

$$A = B \cdot (2A - 1)$$

Nakoniec predelíme $(2A - 1)$, (môžeme, keďže výraz je väčší od nuly pre $A \geq 1$). Dostávame $B = A/(2A - 1)$.

Mnohí ste mali intuíciu, že keď B bude väčšie ako 1, tak A nebude prirodzeným číslom a tým pádom sa zbavíme všetkých ostatných dvojíc iných ako A, 1. Poďme si to dokázať:

Ak $B > 1$, aj výraz $A/(2A - 1)$ má byť väčší ako 1, teda čitateľ má byť väčší ako menovateľ:

$$A > 2A - 1$$

$$0 > A - 1$$

$$1 > A$$

Z čoho je vidieť, že A nie je prirodzené číslo – žiadne prirodzené číslo nie je menšie ako 1. Zostala nám len možnosť $B = 1$:

$$A + 1 = 2 \cdot A \cdot 1$$

$$A + 1 = 2A$$

$$1 = A$$

Dostali sme dvojicu čísel 1, 1. Už len overíme, či pre ne platí zadanie: $1+1 = 2\cdot1\cdot1$, čo sedí.

3. riešenie:

Mnohí z vás si všimli, že jedine dvojica 1, 1 vyhovuje a chceli nejako ukázať, že je naozaj jediná. Vychádzame teraz z toho, že už máme dvojicu najmenších prirodzených čísel 1, 1 a chceme ukázať, že keď ich nejako zvýšime (jedno o x, druhé o y, z ktorých $x > 0$ a $y \geq 0$, aby sa aspoň jedno z čísel zväčšilo), dvojnásobok súčinu sa nám zväčší na hodnotu, ktorá bude stále väčšia ako súčet, teda nová dvojica nebude vyhovovať. Pozrime sa teda na dvojicu $1 + x$, $1 + y$.

$$1 + x + 1 + y = 2 \cdot (1 + x) \cdot (1 + y)$$

$$x + y + 2 = 2xy + 2x + 2y + 2$$

$$0 = 2xy + x + y$$

Aj keby bolo y rovné 0, rovnica bude $0 = 0 + x + 0$ a my vieme, že $x > 0$, čo je spor (ľavá strana sa nemôže rovnať pravej – ľavá je nulová, pravá určite väčšia ako 0). V inom prípade ($y > 0$) bude každý sčítanec väčší ako nula, teda to tiež nebude platiť. Teda iné riešenie väčšie ako 1, 1 neexistuje.

4. riešenie:

Uvádzame ešte jedno riešenie pre naozajstných fajnšmekrov, ktorí sa neboja stredoškolskej matematiky – ak nerozumiete, nevadí a ak rozumiete, tak hor sa riešiť STROM!

Pozrieme sa, ako to vyzerá, keď jedno z čísel (je jedno ktoré) je 1. Nech napr. $A = 1$.

$$1 + B = 2 \cdot 1 \cdot B$$

$$1 + B = 2B$$

$$1 = B$$

Vidíme, že druhé číslo je tiež vždy rovné 1. Zostali nám prípady, kedy ani jedno z nich nie je 1 a chceme ukázať, že súčin $A \cdot B$ bude vždy väčší alebo rovný ako súčet $A + B$, teda dvojnásobok súčinu bude vždy väčší, čo nevyhovuje (má byť rovný). Dokážeme to tzv. matematickou indukciou:

Nech $A \geq 2$, $B \geq 2$.

1. krok bude platiť pre najmenšie A, teda $A = 2$:

$$2 + B \leq 2B$$

$$2 \leq B$$

Vidíme z podmienok, že to platí, teda pre najmenšie možné $A = 2$ sme to dokázali.

2. krok: Ak to platí pre A, bude to platiť pre $A + 1$ (vychádzame z toho, že to platí pre nejaké A – začali sme pri $A = 2$ a chceme ukázať, že potom to platí aj pre $A + 1$, tým pádom postupne pre A rovné 3, 4, \ldots :

$$A + B \leq A \cdot B \text{ , teda } (A + 1) + B \leq (A + 1) \cdot B$$

Upravujeme druhú časť tak, aby bolo jasné, že vyplýva z prvej:

$$(A + 1) + B \leq (A + 1) \cdot B$$

$$(A + B) + 1 \leq (A \cdot B) + B$$

Podľa predpokladu $A + B \leq A \cdot B$ a podmienky $B > 1$ ($B \geq 2$) vieme povedať, že to platí, teda sme vylúčili všetky iné dvojice (väčšie) ako 1, 1. Dokázali sme, že táto nerovnosť platí pre $A = 2$ a taktiež, že ak to platí pre nejaké A, tak že to platí aj pre to nasledujúce $(A + 1)$.

Komentár

Ako vidíte, úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi, pričom všetky tieto riešenia sa našli aj v tých vašich. Najčastejšie to bol pokus o 3. riešenie (nikto ho však nedotiahol úplne do konca a v dostatočnej všeobecnosti). Zvyšné tri typy riešení boli všetky ohodnotené vysokým počtom bodov. Veľa z vás sa to snažilo riešiť rozdelením na viac prípadov a správne ste predpokladali, že to pre väčšie čísla platiť nebude, no nijak ste to nezdôvodnili a preto ste stratili body, čo je škoda.

6

opravovali **Peťo Kovács** a **Robčo Tóth**

najkrajšie riešenia: Martin Melicher, Zoltán Hanesz

58 riešení

Zadanie

Hru sme hrali dvaja – Ignácio a ja. Začína Ignácio. Hráč, ktorý je na ťahu, môže vyfarbiť jeden nevyfarbený bod, alebo všetky body ľubovoľného rovnoramenného pravouhlého trojuholníka, pokiaľ žiaden jeho bod ešte nebol vyfarbený (napríklad trojuholník ako ten na obrázku vpravo). Vyhráva ten, ktorý vyfarbí posledný bod plániku. Ignácio stále začína. Na obrázku máte dva hracie plániky. Ktorý z nás vie vždy vyhrať, ak hráme na prvom plániku a ktorý z nás vie vždy vyhrať, ak hráme na druhom plániku?

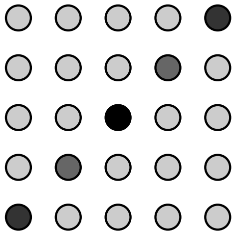
Vzorové riešenie a komentár

Po pár hrách si rýchlo uvedomíme, že na malom plániku vie Ignácio vyhrať vždy bez ohľadu na to, ako dobre by Leonid hral. Mnohí z vás uviedli rýchlu hru, pri ktorej Leonid vyhrá (Ignácio v prvom ťahu zafarbí najväčší trojuholník), avšak neuvedomili si, že Leonid takto vyhrá jedine vtedy, ak ho Ignácio nechá, teda určite nie vždy.

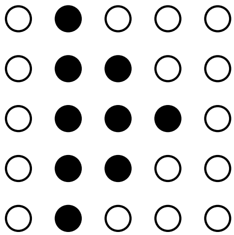
Ak sa nám podarí poriadne popísať Ignáciovu výhernú stratégiu, úloha je vyriešená – nepotrebujeme uvádzať žiadnu ďalšiu (aj keď ich môže byť ešte kopec iných), pretože sme jasne ukázali, že existuje aspoň jedna a stačí, aby sa Igno držal tej.

Jednou z možností, ako môže Igno na malom plániku vyhrať, je v prvom ťahu zafarbiť prostredné políčko. Potom už môže ťahať ľubovoľne a vyhrá bez ohľadu na to, čo bude robiť Leonid. Je to preto, lebo jediné trojuholníky (jedno políčko budeme chápať ako jednopolíčkový trojuholník), ktoré sa po tomto ťahu dajú

na plániku vyfarbiť, majú nepárny počet políčok - tri a jedno. Po tomto ťahu ale ostalo políčok osem a keďže každým ďalším ťahom sa parita nevyfarbených políčok zmení, vyhrať musí ten, ktorý potiahol ako prvý, teda Igno.
Na väčšom plániku nás teda toto pozorovanie vedie k tomu, aby sme skúšali využiť paritu (vlasnosť čísla, ktorá hovorí o tom či je párne alebo nepárne). Mnohí z vás správne napísali, že ak po každom Ignovom ťahu ostane počet políčok párny a označiť sa bude dať len nepárny počet políčok, tak Igno zaručene vyhrá. Problém v tomto je ten, že Ignovi sa vôbec nemusí podariť Leonida do takýchto pozícií dostávať. Je to podobné, ako keby ste v šachu odporučili bielemu hráčovi každý svoj ťah dať súperovi šach – potom zaručene neprehrá. Avšak prakticky je to nemožné. Preto po pár odskúšaných hrách bolo najlepšie od parity upustiť a skúsiť nájsť niečo nové. Niektorým z vás sa to aj podarilo a ide o stratégiu, ktorú odporúčame vyskúšať ako prvú vždy, keď od vás úloha bude vyžadovať nájdenie nejakej víťaznej. Je to symetria.



Ignácio v prvom kole ofarbí prostredné políčko. Potom po ľubovoľnom Leonidovom ťahu Ignácio tento ťah iba okopíruje v stredovej súmernosti podľa stredného políčka. Takýmto spôsobom bude môcť Ignácio vždy nejaké políčka zafarbiť (rozmyslite si dobre, prečo) a preto Leonid zaručene nebude posledným, kto nejaké políčko zafarbí, čo znamená, že Igno zvíťazí. Môžete si všimnúť, že táto stratégia sa dá aplikovať na ľubovoľný štvorcový plánik s nepárnou dĺžkou strany. Uvedieme ešte jedno pekné riešenie a tým je vyfarbenie prvého trojuholníka ako na obrázku.



Po takomto prvom ťahu sa dá použiť už aj myšlienka s paritou, ale je to len kvôli tomu, že už neostáva veľa možností, akými by sa hra mohla uberať. Premyslite si, ako by sa dali jednoducho rozobrať všetky situácie, teda čo poradiť Ignovi, aby vedel správne odpovedať na hocijaký Leonidov ťah a vyhrať.

Zadania 2. série úloh

Úlohy pošlite najneskôr **26. novembra 2012**

Úlohy aj s príbehom nájdete na stránke `http://matik.strom.sk/zadania.php`, alebo v minulom čísle vášho časopisu.

Úloha 1. *Boli tam 3 kontajnery s nápismi „plasty“, „kovy“, „plasty a kovy“. Každý kontajner mal ale nesprávne označenie, ktoré pasovalo na iný z týchto kontajnerov. Keďže som frajer, povedal som si, že skúsim vytiahnuť len jeden odpadok z niektorého kontajneru a pozriem sa, čo to je (môže to byť buď plast alebo kov). Ako viem na základe tejto znalosti správne vymeniť nápisy na kontajneroch?*

Úloha 2. *Jedlá v jedálničku sú označené prirodzenými číslami. Niekto si zvolil šesť jedál. Barman si chcel vystreliť z kuchára, a tak sčítal čísla týchto jedál - prvé s druhým, druhé s tretím, tretie so štvrtým, štvrté s piatym, piate so šiestym a šieste s druhým. Výsledky boli 18, 21, 20, 18, 12, 17. Ako mal kuchár zistiť, ktoré jedlá mal pripraviť?*

Úloha 3. *Šachovnica mala tradičné rozmery* 8×8 *a na nej stál klasický jazdec. Pohyby jazdca sú dve políčka dopredu do ľubovoľného smeru a jedno políčko do strany (ako písmeno L). Ak jazdec stojí v ľavom dolnom rohu, koľko najmenej ťahov musí Leonid urobiť, aby jazdca presunul do pravého horného rohu?*

Úloha 4. *Na veľmi dlhej rovnej trati sme dve skupinky bežcov behali z dvoch koncov. Mali sme medzi sebou pravidelné 10 metrové odstupy a všetci sme behali tou istou nemennou rýchlosťou. Ak sa nejakí dvaja bežci stretli, tak sa v okamihu otočili a obaja pokračovali tou istou rýchlosťou, ale opačným smerom. Takto sme behali, až pokým sme sa nedostali do situácie, keď oproti nám nikto nebežal. Vtedy sme dobehli na koniec trate a sledovali ostatných. Sprava nás bežalo* 12 *a zľava* 8*. Koľkí dobehli na pravý a koľkí na ľavý koniec trate? Ako by to vyzeralo, keby sprava behalo* 42 *a zľava* 47 *bežcov?*

Úloha 5. *Akú časť obsahu nerovnoramenného lichobežníka KLMN tvorí obsah trojuholníka ABC, kde A je stred základne KL, B je stred základne MN a C je stred ramena KN?*

Úloha 6. *Chceli zistiť, či dokážu medzi ľubovoľnými deviatimi po sebe nasledujúcimi prirodzenými číslami (na ich tričkách) nájsť aspoň jedno číslo na tričku jedného z nich, ktoré je s číslami na tričkách ostatných nesúdeliteľné (jeho najväčší spoločný deliteľ s každým z nich je* 1*). Musí byť vždy nejaké také číslo medzi deviatimi za sebou idúcimi prirodzenými číslami? Svoju odpoveď poriadne zdôvodnite.*
Príklad: Medzi číslami 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 *je týmto číslom napríklad* 7*, pretože žiadne iné číslo nemá rovnakého deliteľa väčšieho ako* 1*. Takýmto číslom je aj* 11 *a* 13*, ale stačilo nájsť jedno. Medzi číslami* 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670 *to je číslo* $667 = 23 \cdot 29$*, pretože žiadne iné z týchto čísel sa nedá deliť ani jedným z deliteľov* 667*.*

Poradie po 1.sérii

PS je súčet bodov za predchádzajúce série, **1–6** sú body za jednotlivé úlohy a **CS** je celkový súčet bodov.

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	PCS
1. – 3.	Samuel Krajči	Sekunda	GAlejKE	0	9	9	9	9	8	9	54
	Katarína Kuľková	8. A	ZSDrienov	0	9	9	9	9	8	9	54
	Martin Melicher	7. A	ZKro4KE	0	9	9	9	6	9	9	54
4.	Lenka Kopfová	7. A	ZHradCZ	0	7	9	9	9	9	-	52
5.	Zoltán Hanesz	9. A	ZKuzmKE	0	9	9	9	9	6	9	51
6. – 9.	Matej Hanus	6. A	ZKro4KE	0	9	9	8	9	3	4	48
	Juraj Mičko	9. A	ZKro4KE	0	9	4	9	9	8	9	48
	Martin Mihálik	Sekunda	GAlejKE	0	9	9	9	9	3	-	48
	Marek Koman	Tercia A	GAlejKE	0	9	9	-	9	6	9	48
10.	Viktória Brezinová	Sekunda	GAlejKE	0	9	8	1	9	3	9	47
11.	Martin Masrna	8. A	ZKro4KE	0	9	9	9	9	4	4	44
12.	Martin Mičko	Sekunda	GAlejKE	0	-	7	7	9	2	9	43
13. – 14.	Kristína Bratková	8. A	ZKe30KE	0	9	9	7	-	4	9	42
	Jakub Genči	9. A	ZKro4KE	0	9	9	7	9	3	5	42
15. – 17.	Lívia Knapčoková	Sekunda	GAlejKE	0	9	4	1	8	9	2	41
	Martin Šalagovič	Sekunda	GAlejKE	0	5	3	9	9	6	-	41
	Samuel Chaba	Sekunda	GAlejKE	0	9	8	0	9	2	4	41
18.	Tereza Rudzanová	Sekunda	GAlejKE	0	9	9	2	9	2	2	40
19.	Jakub Mach	9. A	ZKro4KE	0	9	9	9	9	2	-	38
20.	Adam Urbán	9. A	ZKuzmKE	0	9	4	6	9	2	7	37
21.	Matej Genči	8. A	ZKro4KE	0	9	4	8	9	3	1	36
22. – 23.	Vladimír Durňák	Sekunda	GAlejKE	0	9	6	9	0	2	-	35
	Natália Česánková	8. A	ZHvieLY	0	7	9	2	9	3	4	35
24. – 25.	Kristína Kurucová	7. A	ZKomeSB	0	8	3	4	9	1	1	34
	Miroslava Baranová	9. A	ZSpisTE	0	7	9	7	0	2	9	34
26. – 29.	Tomáš Miškov	Sekunda B	GTr12KE	0	5	9	1	9	0	0	33
	Radomír Miščík	7. A	ZKro4KE	0	6	9	7	-	1	1	33
	Filip Csonka	Sekunda	GAlejKE	0	8	3	1	9	3	1	33
	Martin Števko	Sekunda	GAlejKE	0	9	4	-	3	3	5	33
30. – 31.	Kamil Fedič	8. C	ZHrnčHÉ	0	9	9	4	0	3	4	32
	Patrik Leinstein	7. A	ZStarKE	0	7	9	6	-	1	-	32
32. – 33.	Milena Kaprálová	Sekunda	GKomeLY	0	9	9	-	1	2	0	30
	Veronika Schmidtová	9. A	ZKro4KE	0	9	9	9	0	3	-	30
34.	Tereza Straková	7. C	ZBajkPO	0	9	3	1	3	-	3	28
35.	Tomáš Mihálik	7. A	ZKro4KE	0	6	9	1	-	2	0	27
36.	Jonáš Suvák	7. C	ZŠmerPO	0	4	3	7	3	2	1	26
37. – 38.	Veronika Novákiová	7. B	ZHlinŽA	0	8	3	3	-	2	1	25
	Tomáš Tóth	8. A	ZKro4KE	0	5	4	8	0	2	4	25
39.	Peter Čulen	8. A	ZKro4KE	0	6	3	2	9	2	-	24

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	PCS
40. – 42.	Rastislav Špakovský	8. B	ZTomKe	0	6	3	-	1	3	9	23
	Denis Nevelöš	8. A	ZZeliKE	0	6	9	1	-	2	4	23
	Damián Ondro	7.	ZŠTižina	0	9	2	0	1	0	2	23
43. – 44.	Lucia Hlaváčiková	8. A	ZGemeKE	0	8	8	2	-	-	4	22
	Peter Mann	Sekunda	GKomeTV	0	8	3	0	1	1	1	22
45. – 47.	Matúš Ferenčuha	7. A	ZKro4KE	0	9	-	-	0	2	-	20
	Nikola Svetozarov	8. B	ZKro4KE	0	-	9	6	-	2	3	20
	Jaroslava Proftová	8. A	ZŠLikavka	0	9	9	-	-	2	0	20
48.	Šimon Juhás	7. A	ZKro4KE	0	5	3	-	-	3	0	16
49. – 50.	Roxana Rajtáková	8. A	ZKro4KE	0	9	3	-	-	3	-	15
	Katarína Gedrová	Sekunda	GKomeTV	0	3	5	-	0	2	0	15
51. – 53.	Kamil Krajč	Tercia	GTr12KE	0	9	3	-	-	2	-	14
	Martin Šavel	9. A	ZSpisTE	0	9	3	1	0	1	0	14
	Katarína Piptová	8. B	ZTomKe	0	5	3	-	1	2	2	14
54. – 57.	Max Õrhalmi	Tercia A	GAlejKE	0	6	3	0	3	1	-	13
	Marek Németh	9. A	ZSpisTE	0	9	2	1	0	1	0	13
	Martin Muzelák	8. A	ZStanKE	0	2	3	6	0	2	0	13
	Samuel Ivan	7. B	ZŠmerPO	0	5	2	1	0	0	0	13
58. – 60.	Miriam Marčišinová	7. A	ZStarKE	0	4	0	0	1	2	1	12
	Magdaléna Heveriová	7. B	ZStanKE	0	3	3	1	0	2	0	12
	Adam Kalivoda	8. A	ZKro4KE	0	-	9	-	0	1	2	12
61. – 63.	Matúš Janok	Sekunda	GKomeTV	0	-	3	1	0	2	2	11
	Lívia Sokolová	Tercia	GTr12KE	0	9	2	-	-	-	-	11
	Samuel Oswald	9. A	ZKro4KE	0	7	4	-	-	-	-	11
64. – 65.	Matej Dubinský	8. A	ZKro4KE	0	-	3	1	-	2	4	10
	Juraj Danech	7.	ZŠTižina	0	1	3	0	1	2	0	10
66.	Dávid Stripaj	7. A	ZKro4KE	0	0	4	-	-	1	-	9
67. – 68.	Veronika Mušinská	8. B	ZKro4KE	0	3	4	-	0	1	-	8
	Maximilián Goleňa	8. A	ZStanKE	0	2	4	0	0	2	0	8
69. – 70.	Michal Dolník	8. A	ZMaurKE	0	7	-	-	-	-	-	7
	Ivana Topitkalová	8. B	ZTomKe	0	2	3	0	0	2	0	7
71.	Michal Lukáč	8. A	ZKro4KE	0	3	3	-	-	-	-	6
72. – 75.	Tomáš Molnár	9. A	ZHvieLY	0	-	3	-	-	2	0	5
	Gabriela Laurenčíková	8. A	ZMaurKE	0	3	2	0	0	-	0	5
	Zuzana Mladšíková	8. A	ZMaurKE	0	2	2	1	-	-	-	5
	Jakub Kučerák	7. A	ZKro4KE	0	2	1	-	-	-	0	5
76. – 77.	Marek Lukáč	7. A	ZKro4KE	0	-	-	1	-	1	-	3
	Filip Matiščík	8. B	ZNejeSN	0	1	2	0	0	0	0	3
78.	Lenka Zajacová	8. A	ZMaurKE	0	2	-	-	-	-	-	2
79.	Sofia Komlošová	8. B	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	1	1
80. – 85.	Laura Bodyová	8. B	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	-	0
	Martin Zdravecký	8. A	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	-	0
	Bohuš Staško	8. A	ZKro4KE	0	-	-	-	0	-	-	0
	Natália Tóthová	8. B	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	-	0

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	PCS
	Jakub Ivanecký	8. A	ZKro4KE	0	-	-	-	0	-	-	0
	Alexandra Fabianová	8. A	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	-	0

Za podporu a spoluprácu ďakujeme:

AGENTÚRA NA PODPORU VÝSKUMU A VÝVOJA

Korešpondenčný matematický seminár **MATIK**
Číslo 2 • Zimná časť 26. ročníka (2012/13) • Vychádza 5. novembra 2012
Internet: `http://matik.strom.sk` • E-mail: `matik@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://www.strom.sk` • E-mail: `zdruzenie@strom.sk`